Faculté de Physique-USTHB 20 avril 2021
1ère année MI

Corrigé de l'examen de rattrapage de MP

Exercice 1 (12 pts):

1. les expressions de $V_x(t)$ et $V_y(t)$: **(1.5 pts)**

On a : $V_x(t) = V_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)dt$ et $V_y(t) = V_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t)dt$

à $t = 0s \dashrightarrow x_0 = 0m,\quad y_0 = 0m,\quad v_{x0} = 0m/s \;\; et \;\; v_{y0} = 2m/s$

$\forall\, \boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{30}\boldsymbol{s}] \dashrightarrow \boldsymbol{V_x(t) = 0.2t}$

$\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{20}\boldsymbol{s}] \dashrightarrow \boldsymbol{V_y(t) = 2m/s},\qquad \boldsymbol{t} \in [\mathbf{20}, \mathbf{30}\boldsymbol{s}] \dashrightarrow \boldsymbol{V_y(t) = 0.1t}$

2. Les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$: **(1.5 pts)**

$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} V_x(t)dt \dashrightarrow \forall\, \boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{30}\boldsymbol{s}] \dashrightarrow \boldsymbol{x(t) = 0.1t^2}$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)dt \dashrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{20}\boldsymbol{s}] \dashrightarrow \boldsymbol{y(t) = 2t} \\ \boldsymbol{t} \in [\mathbf{20}, \mathbf{30}\boldsymbol{s}] \dashrightarrow \boldsymbol{y(t) = \frac{1}{20}t^2 + 20} \end{cases}$$

3. En déduire les équations qui décrivent la trajectoire du mobile : **(1 pt)**

$$\begin{cases} \boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{20}\boldsymbol{s}] \dashrightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{40}y^2} \;\; ou \;\; \boldsymbol{y = 2\sqrt{10}\,\sqrt{x}} \dashrightarrow (parabole) \\ \boldsymbol{t} \in [\mathbf{20}, \mathbf{30}\boldsymbol{s}] \dashrightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 20} \dashrightarrow (droite) \end{cases}$$

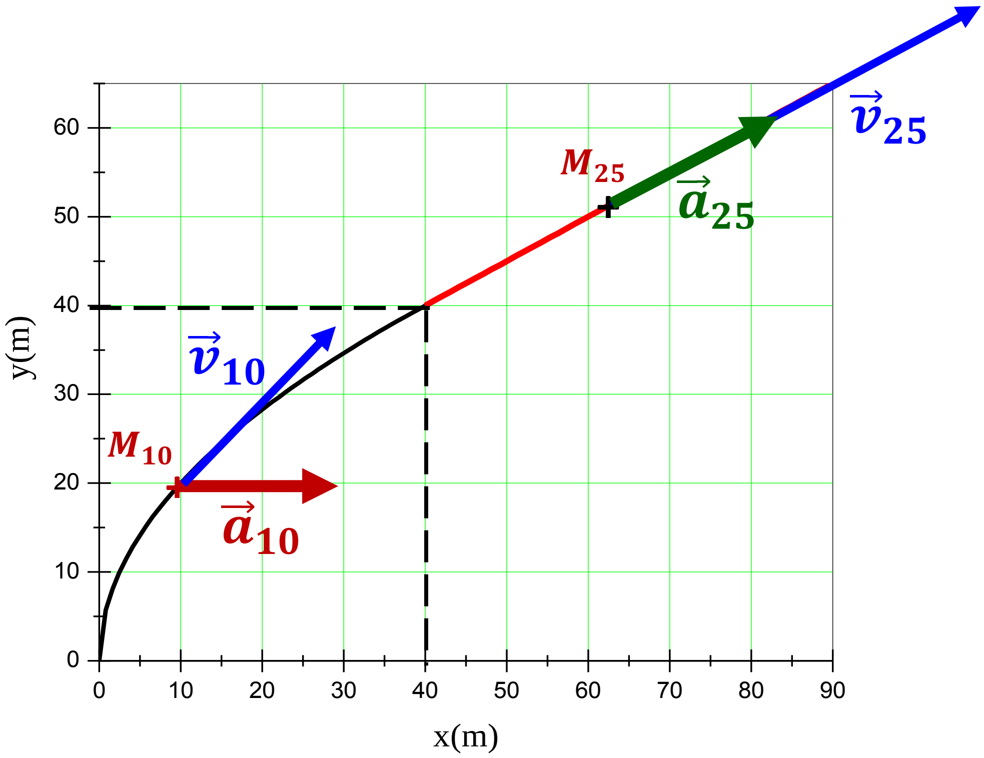
4. * Tableau des valeurs **(0.25 pts) pour chaque posistion (x,y) = (1.5 pts)**

t (s)	5	10	15	20	25	30
$x(m)$	**2.5**	**10**	**22.5**	**40**	**62.5**	**90**
$y(m)$	**10**	**20**	**30**	**40**	**51.25**	**65**

5. Tracé de la trajectoire et représentation de vectrices vitesses et accélérations aux instants $t_1 = 10s$ et $t_2 = 25s$.

$$\boldsymbol{t = 10s} \begin{cases} \overrightarrow{OM_{10}} = 10\vec{\imath} + 20\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{v_{10}} = 2(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \\ \overrightarrow{a_{10}} = 0.2\vec{\imath} \end{cases} \qquad \boldsymbol{t = 25s} \begin{cases} \overrightarrow{OM_{25}} = 62.5\vec{\imath} + 51.25\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{v_{25}} = 5\vec{\imath} + 2.5\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{a_{25}} = 0.2\vec{\imath} + 0.1\vec{\jmath} \end{cases}$$

* Tracé de la trajectoire (1cm → 10 m) **(1 pt)**
* Représentation des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ (1cm → 1m/s et 1cm → 0.1m/s^2) **(0.5 pts x 4) = (2 pts)**



6. la nature du mouvement dans chaque phase en justifiant : **(1.5 pts)**

$* \ \boldsymbol{t \in [0, 20s]}$ ⟶ **trajectoire curviligne,** $V(t) = \sqrt{V_x(t)^2 + V_y(t)^2} = 0.2\sqrt{t^2 + 100} \neq cte \ > 0$

$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{0.2t}{\sqrt{t^2+100}} \neq cte \quad et \ > 0$, donc $\boldsymbol{a_t V > 0}$

===> **Mouvement Curviligne Accéléré (MCA).**

$* \ \boldsymbol{t \in [20, 30s]}$ ⟶ **trajectoire rectiligne,** $a = cte > 0 \quad aV > 0$

===> **Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (MRUA).**

7. La distance parcourue entre 20s et 30s : **(1 pt)**

$$\boldsymbol{Dis]_{20}^{30s} = |\overrightarrow{M_{20}M_{30}}| = \sqrt{(x_{30} - x_{20})^2 + (y_{30} - y_{20})^2} = 25\sqrt{5}\, m = 55.9\, m}$$

8. Calcul du travail effectué entre t_1 et t_2 en utilisant le théorème de l'énergie cinétique **(1 pt)**

$$\boldsymbol{W|_{10}^{25s} = \Delta E_C|_{10}^{25s} = \frac{1}{2} m(V_{25}^2 - V_{10}^2) = 1.16\ \mathrm{J}}$$

Exercice 2 (8 pts) :

1. Calcul de la valeur maximale de l'angle α_{max} pour laquelle ce système reste en équilibre : **(1.5 pts)**

===> Etude du système à la limite de la rupture de l'équilibre

Fil inextensible ---> $a_1 = a_2 = a$ (Or à l'équilibre, on a : $a = 0\ m/s^2$)

Masse du fil négligeable ---> $T_1 = T_2 = T$

$$(m_1): \quad \vec{P_1} + \vec{C_1} + \vec{T_1} = \vec{0} \quad ==> \begin{cases} T - C_{1x} = 0 --- (1) \\ C_{1y} - P_1 = 0 --- (2) \end{cases}$$

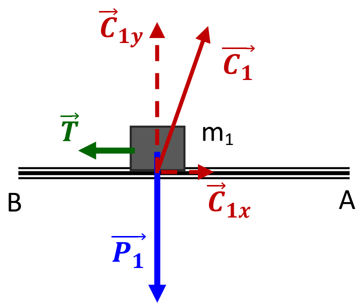
$$(m_2): \quad \vec{P_2} + \vec{C_2} + \vec{T_2} = \vec{0} \quad ==> \begin{cases} -T + P_{2x} = 0 --- (3) \\ C_2 - P_{2y} = 0 --- (4) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_{2x} = m_2 g\ \sin(\alpha_{Max}) \\ P_{2y} = m_2 g\ \cos(\alpha_{Max}) \end{cases}$$

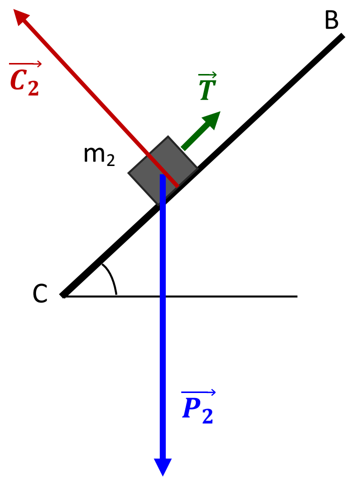
$\boldsymbol{(1) + (3) ==> P_{2x} - C_{1x} = 0}$ **et comme** $\boldsymbol{C_{1x} = \mu_s C_{1y} = \mu_s m_1 g}$ **alors**

$P_{2x} = m_2 g\ \sin(\alpha_{Max}) = \boldsymbol{\mu_s m_1 g}$ **D'où** $\boldsymbol{\sin(\alpha_{Max}) = \mu_s \frac{m_1}{m_2} = 0.5\mu_s = 0.2}$ **et** $\boldsymbol{\alpha_{Max} = 11.54^0}$

2. Pour α = 10°, calcul et représentation des forces (1 cm → 10 N) : **(0.25 pts x 6) = (1.5 pts)**

$$(m_1): \begin{cases} P_1 = m_1 g = 20N \\ C_{1y} = P_1 = 20N \\ C_{1x} = T = P_{2x} = 6.9N \end{cases} \qquad (m_2): \begin{cases} P_2 = 2P_1 = 40N \\ C_{2y} = P_{2y} = P_2\ \cos(10^0) = 39.4N \\ C_{2x} = 0N \\ T = P_{2x} = P_2\ \sin(10^0) = 6.9N \end{cases}$$





Dans ce qui suit, nous considérons la valeur α = 45°.

3. Calcul de l'accélération $\boldsymbol{a}$ prise par le système : **(1.5 pts)**

$$(m_1): \quad \vec{P_1} + \vec{C_1} + \vec{T_1} = m_1 \vec{a_1} \quad ==> \begin{cases} T - C_{1x} = m_1 a --- (1') \\ C_{1y} - P_1 = 0 --- (2') \end{cases}$$

$$(m_2)\ :\quad \overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{C_2}+\overrightarrow{T_2}=m_2\overrightarrow{a_2}\ \ ==>\ \begin{cases} -T+P_{2x}=m_2 a---(3') \\ \\ C_2-P_{2y}=0---(4') \end{cases}$$

$(1')+(3')==>\ \boldsymbol{P_{2x}-C_{1x}=(m_1+m_2)a}$ **et comme** $\boldsymbol{C_{1x}=\mu_d C_{1y}=\mu_d m_1 g}$ **alors**

$$\boldsymbol{a=g\frac{m_2\sin\alpha-\mu_d m_1}{m_1+m_2}=g\frac{2\sin\alpha-\mu_d}{3}=4.05m/s^2}$$

4. Si $V_I=10m/s$, calcul du temps t_I , sachant que la masse était au repos : **(0.5 pts)**

$a=cte==>V_I=at_I$ alors $\boldsymbol{t_I=\frac{V_I}{a}=2.47\ s}$

5. $V_D=0m/s$ et $\boldsymbol{\mu'_d=0.25}$

a-) Calcul de a' sur IC : le fil se coupe donc $(T=0N)$: **(1 pt)**

$(m_2)\ :\quad \overrightarrow{P_2}+\overrightarrow{C_2}=m_2\overrightarrow{a'}_2\ ==>\ P_{2x}=m_2a'$ d'où $\boldsymbol{a'=g\sin\alpha=7.07m/s^2}$

b-) Calcul de V_C si $IC=3m$: **(1 pt)**

$a'=cte$ donc $V_C^2-V_I^2=2a'IC$ ce qui donne $\boldsymbol{V_C=\sqrt{2a'IC+V_I^2}=11.93m/s}$

c-) En utilisant le Théorème de l'énergie cinétique, $W(\overrightarrow{C_2})\big|_C^D=?$ **(0.5 pts)**

Selon ce théorème on a :

$$W(\vec{F}^{res})\big|_C^D=\Delta E_C|_C^D=\frac{1}{2}m_2(V_D^2-V_C^2)=-\frac{1}{2}m_2V_C^2$$

Or, on a :

$$W(\vec{F}^{res})\big|_C^D=W(\overrightarrow{P_2})\big|_C^D+W(\overrightarrow{C_2})\big|_C^D=W(\overrightarrow{C_2})\big|_C^D,\qquad W(\overrightarrow{P_2})\big|_C^D=0\text{ J},\ \ puisque\ \overrightarrow{P_2}\perp CD$$

Donc: $\boldsymbol{W(\overrightarrow{C_2})\big|_C^D=-\frac{1}{2}m_2V_C^2=-284.84\text{ J}\dots\dots(A)}$

d-) En déduire $CD=\ ?$ **(0.5 pts)**

$$W(\overrightarrow{C_2})\big|_C^D=W(\vec{C}_{2x})\big|_C^D+W(\vec{C}_{2y})\big|_C^D=W(\vec{C}_{2x})\big|_C^D,\qquad puisque\ \vec{C}_{2y}\perp CD$$

Donc $\boldsymbol{W(\overrightarrow{C_2})\big|_C^D=-C_{2x}CD=-\mu'_d C_{2y}CD=-\mu'_d m_2\,gCD\dots\dots(B)}$

Et puisque on a $(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{B})$, alors on obtient $\boldsymbol{CD=\frac{1}{2}\frac{V_C^2}{\mu'_d\,g}=28.48\ m}$