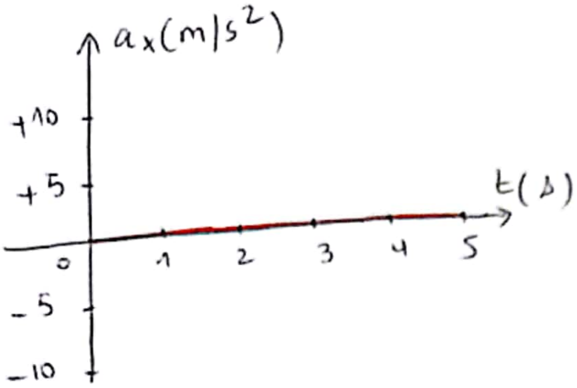
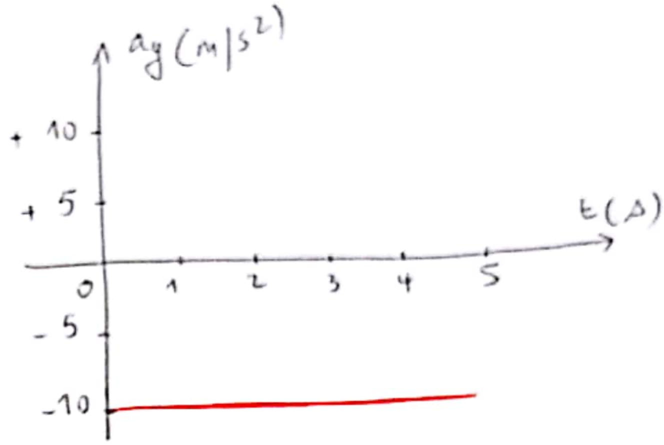
Corrigé - Rattrapage Phy.I. (ST- 2021)

Exercice N° 01

1) Représentation des graphes $a_x^{(t)}$ et $a_y^{(t)}$:

$[0,5]s \begin{cases} a_x = 0 \ m/s^2 \\ a_y = -10 \ m/s^2 \end{cases}$ représente la pente sous les graphes de $V_x^{(t)}$ et $V_y^{(t)}$.





2) a) Les expressions des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$

on sait que : $\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = V_x dt \\ dy = V_y dt \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_0^t dx = \int_0^t V_x dt \\ \int_0^t dy = \int_0^t V_y dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) - \cancel{x_0}^{\,0} = \int_0^t 30 dt \\ y(t) - \cancel{y_0}^{\,0} = \int_0^t (-10t + 30) dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 30t \Big|_0^t \\ y(t) = -\frac{10t^2}{2} + 30t \Big|_0^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = 30t \\ y(t) = -5t^2 + 30t \end{cases} \ (m)}$$

Deduire l'équation de la trajectoire : $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = 30t \\ y = -5t^2 + 30t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{30}$$

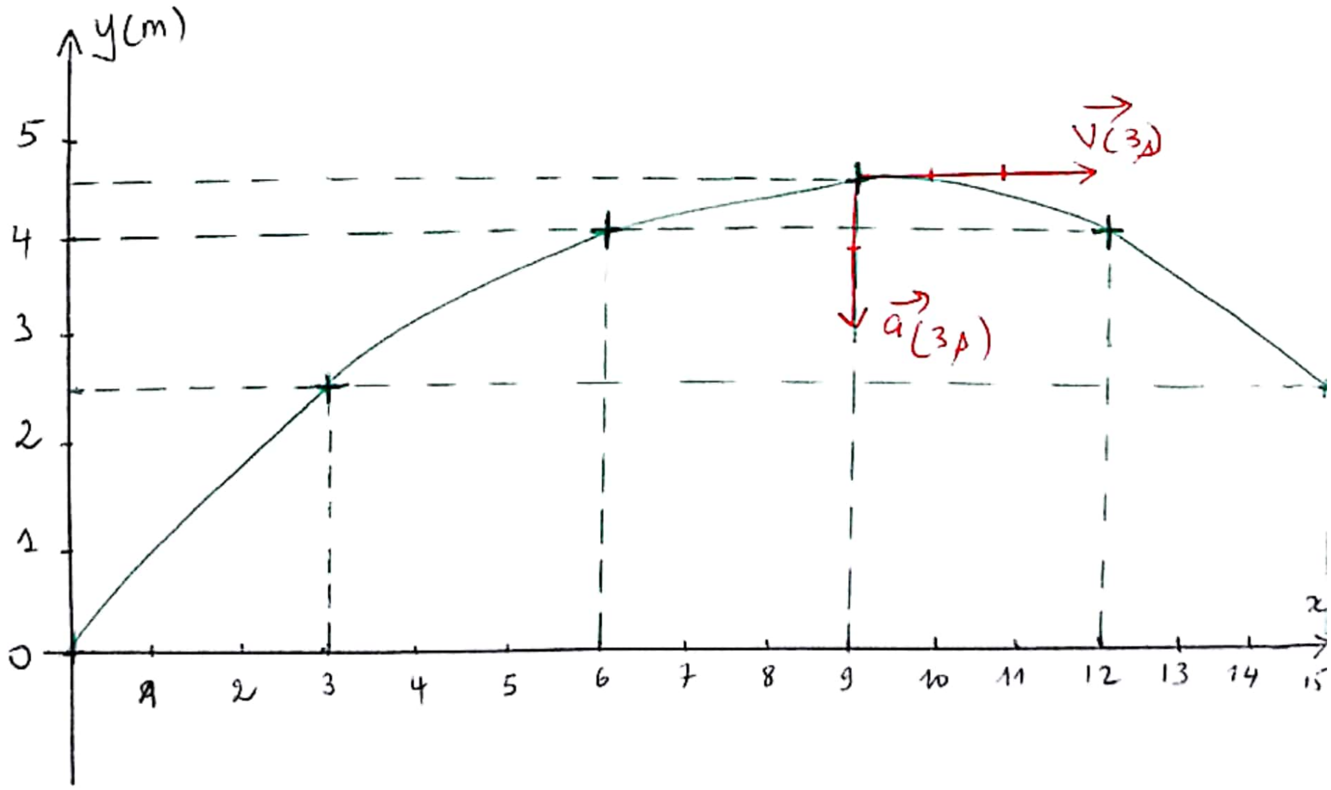
donc $$y = -5\left(\frac{x}{30}\right)^2 + 30\left(\frac{x}{30}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{x^2}{180} + x}$$

b) On complète le tableau :

t(s)	0	1	2	3	4	5
x(m)	0	30	60	90	120	150
y(m)	0	25	40	45	40	25

c) Construction de la trajectoire : 1cm $\longrightarrow$ 10m



3) a) Les vecteurs vitesses et accélérations à t quelconque.

$$\vec{v}(t) = V_x(t)\,\vec{i} + V_y(t)\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(t) = 30\,\vec{i} + (-10t + 30)\,\vec{j} \quad , \forall t} \quad (m/s)$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = 0\,\vec{i} + (-10)\,\vec{j} \quad , \forall t} \quad (m/s^2)$$

Les modules : $\begin{cases} \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \\ \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \|\vec{V}(t)\| = \sqrt{100t^2 - 600t + 1800} \\ \|\vec{a}_{(t)}\| = \sqrt{100} \end{cases} ; \forall t}$$

b) Construction des vecteurs vitesse et accélération à t = 3 s

à $t = 3\,s$ $\begin{cases} V_x = 30\,m/s & (3\,cm) \\ V_y = 0\,m/s \end{cases}$

$\begin{cases} a_x = 0\,m/s^2 \\ a_y = -10\,m/s^2 & (2\,cm) \end{cases}$

pour la représentation, voir la trajectoire.

4) Le produit scalaire $\vec{v}(3s) \cdot \vec{a}(3s)$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

L'angle θ compris entre ces deux vecteurs est égale

à $\boxed{\frac{\pi}{2} \quad \text{car} \quad \vec{v} \perp \vec{a}}$

5) a) L'expression de l'accélération tangentielle $a_t(t)$

on sait que : $a_t(t) = \dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt}$

donc : $a_t(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{100t^2 - 600t + 1800}\right)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_t = \frac{100t - 300}{\sqrt{100t^2 - 600t + 1800}}} \; (m/s^2)$$

b) L'accélération a_t à $t = 3s$:

$$\boxed{a_t = 0 \quad m/s^2}$$

Le rayon de courbure ρ à $t = 3s$:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V^2}{a_N}$$

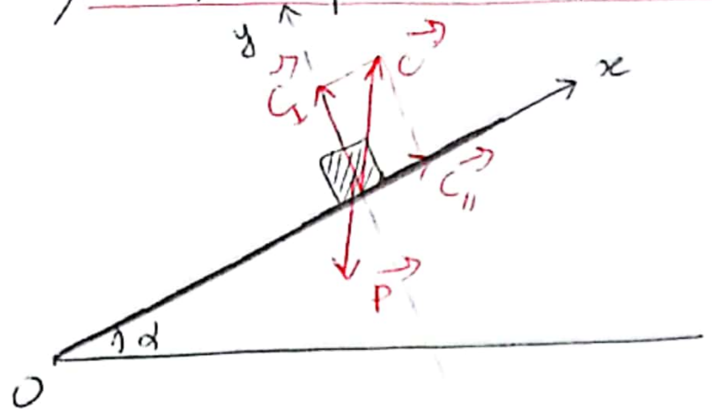
$$a_N = \sqrt{a^2 - a_t^2} \quad \Rightarrow \quad a_N = \sqrt{100} \; (m/s^2)$$

donc : $\rho = \dfrac{\left(\sqrt{30^2}\right)^2}{\sqrt{100}} = 90 \; m$

$$\boxed{\rho = 90 \, m}$$

Exercice N° 02 :

I) 1) Représentation qualitative des forces agissant sur le corps en equilibre :



2) Determinons l'angle α_{max} d'inclinaison maximal

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a} = \vec{0} \quad (\text{c'est à l'equilibre})$$

$$\vec{P} + \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \underline{ox} : C_\parallel - mg\sin\alpha_{max} = 0 \\ \underline{oy} : C_\perp - mg\cos\alpha_{max} = 0 \end{cases}$$

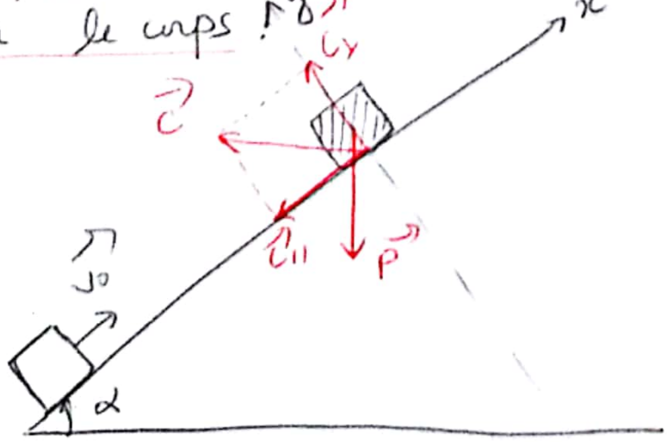
et comme on est à l'equilibre ; donc $\mu_s = \dfrac{C_\parallel}{C_\perp}$

donc :

$$\mu_s = \frac{mg\sin\alpha_{max}}{mg\cos\alpha_{max}} = \frac{\sin\alpha_{max}}{\cos\alpha_{max}} = tg\,\alpha_{max}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{max} = 26{,}5^\circ}$$

II) 1) Représentation qualitative des forces agissant sur le corps :



2) Calculons le coefficient de frottement dynamique μ_d :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{C} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} ox : & -C_{//} - mg\sin\alpha = ma \quad \dots (1) \\ oy : & C_{\perp} - mg\cos\alpha = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

Comme : $\mu_d = \dfrac{C_{//}}{C_{\perp}} \Rightarrow C_{//} = \mu_d C_{\perp}$

$$\Rightarrow C_{//} = \mu_d \, mg\cos\alpha$$

donc : $(1) \Rightarrow -\mu_d \, mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_d = -\frac{mg\sin\alpha + ma}{mg\cos\alpha}}$$

A.N : $\boxed{\mu_d = 0,20}$

3) Le travail du poids $\vec{P}$ le long du trajet OB : avec OB = 2m ?

$\rightarrow 0$ car $P_y \perp dy$

$$W(\vec{P}) = \int_O^B \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_O^B (P_x dx + P_y dy)$$

$$\Rightarrow W(\vec{P}) = \int_O^B P_x dx = -mg\sin\alpha \int_O^B dx$$

$$\boxed{W(\vec{P}) = -mg\sin\alpha \, OB}$$

$$\Rightarrow \boxed{W(\vec{P}) = -10 \, J}$$

4) Le travail de la force de contact $\vec{C}$ le long du trajet $OB = 2m$,

$$W(\vec{C}) = \int_O^B \vec{C} \cdot \vec{dr} = \int_O^B (C_x\, dx + C_y\, dy)$$

$C_y \perp dy$ $\rightarrow 0$

$$W(\vec{C}) = -\int_O^B C_1\, dx$$

sachant que : $C_1 = \mu_d\, mg\cos\alpha$

$$W(\vec{C}) = -\int_O^B \mu_d\, mg\cos\alpha\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{W(\vec{C}) = -\mu_d\, mg\cos\alpha\, OB}.$$

$$\boxed{W(\vec{C}) = -3{,}5\, J}$$

5) L'energie cinétique E_c de la masse m au point B,

d'Après le théorème de l'energie cinétique :

$$\Delta E_c \Big|_0^B = W(\vec{F_{ext}})$$

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(0) = W(\vec{P}) + W(\vec{C})$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{C})$$

donc $E_c(B) = E_c(0) + W(\vec{P}) + W(\vec{C})$

$$\boxed{E_c(B) = 0{,}04\, J}$$