University of Science and the Technology
Houari Boumediene (USTHB)

Faculty of Physics

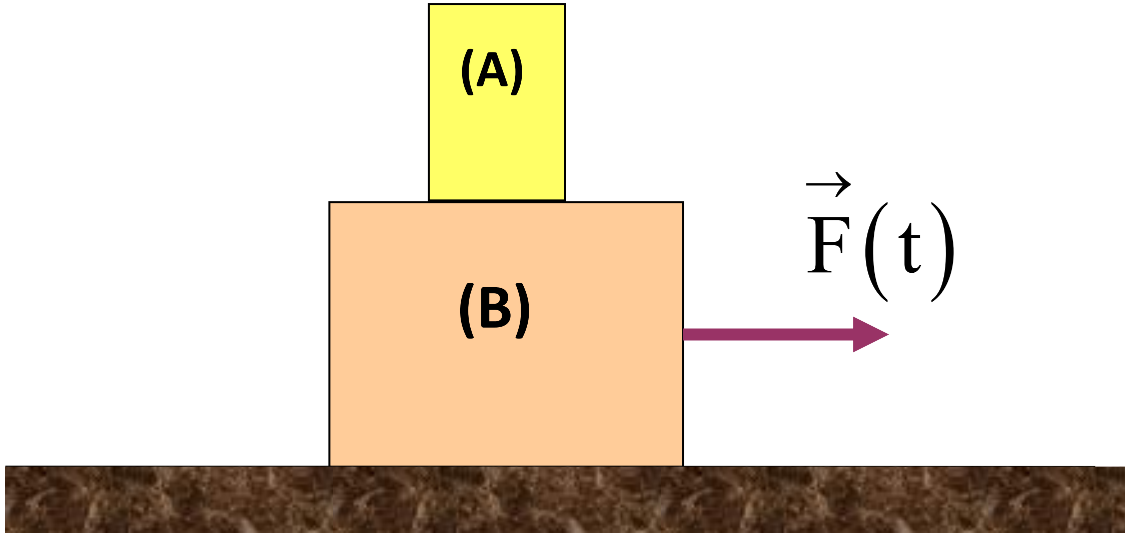
DYNAMIC EXERCISES

1st year LIC.INFORMATIQUE –SEC4

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

EXERCICE 8 :

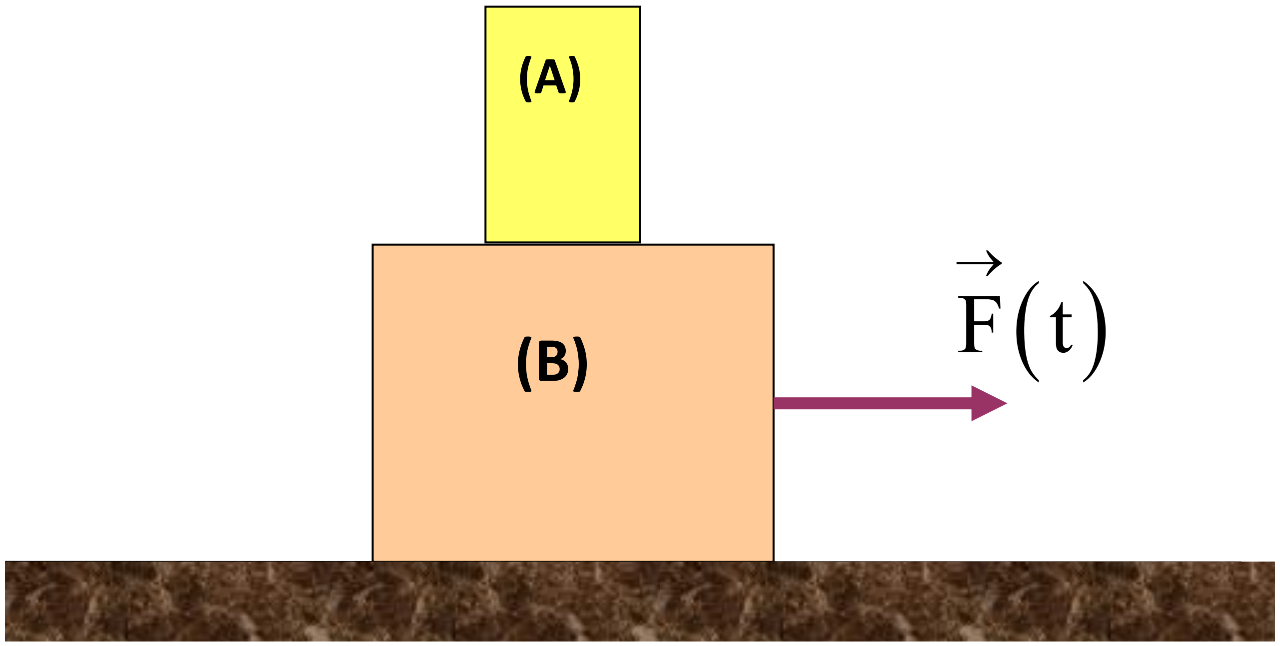
Un corps (A), de masse $m = 2kg$, repose sur un corps (B), de masse $M = 3$ kg, qui repose, lui, sur la surface horizontale d'une table (T). On admettra que les dimensions de la table et du corps (B) sont telles que (A) ne puisse pas quitter le dessus de (B) et ce dernier le dessus de la table, dans l'intervalle de temps $0 < t < 80$ s. Une force horizontale, de direction fixe et variant suivant la loi: $F(t) = \alpha t$ ($\alpha = 0.5$ N/s), est appliquée à (B) (voir figure). Le contact corps (B)/table est caractérisé par les coefficients de frottement statique $\mu_s = 0.5$ et $\mu_d = 0.4$. Le contact corps (A)/ corps (B) est, lui, parfaitement lisse.



❑ Applications : Série.02 : Dynamique

EXERCICE 8 :

1) Déterminer l'instant t_0, de la rupture de l'équilibre du système.
2) Dessiner qualitativement les forces appliquées à l'instant $t_1 = 30s$;
a) au corps (A) tout seul;
b) b) au corps (B) tout seul;
c) c) au système (A+B).
3) Déterminer, puis dessiner à l'échelle 1 cm ➔ 10 N, les forces appliquées, à l'instant $t_2 = 60s$, au corps (B) tout seul.



❑ Applications : Série.02 : Dynamique

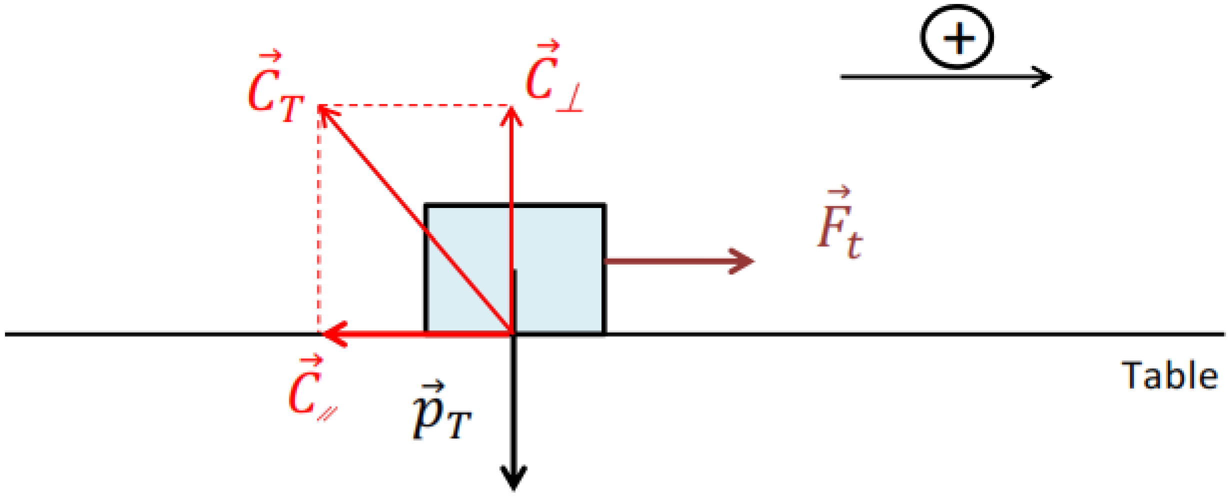
1) Déterminer l'instant t_0, de la rupture de l'équilibre du système.

Considérons le système des deux corps (A et B) un seul corps ; et appliquons la RFD :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$$

À l'équilibre $\vec{a} = \vec{0}$:

$$\overrightarrow{C_T} + \overrightarrow{P_T} + \overrightarrow{F(t)} = \vec{0}$$

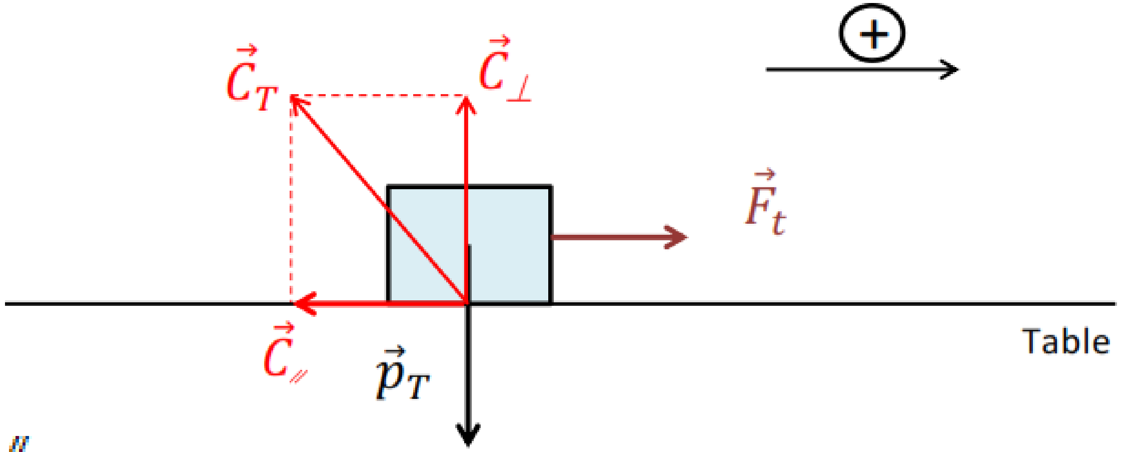


Projetons cette équation sur les deux axes (Ox) et (Oy):

Applications : Série.02 : Dynamique

1) **Déterminer l'instant t_0, de la rupture de l'équilibre du système.**

$$\begin{cases} (Ox): & F - C_{/\!/} = 0 \quad (1) \\ (Oy): & C_{\perp} - (m+M)g = 0 \quad (2) \end{cases}$$



$$\Longrightarrow \begin{cases} (Ox): & F = \alpha t_0 = C_{/\!/} \\ (Oy): & C_{\perp} = (m+M)g = 0 \end{cases}$$

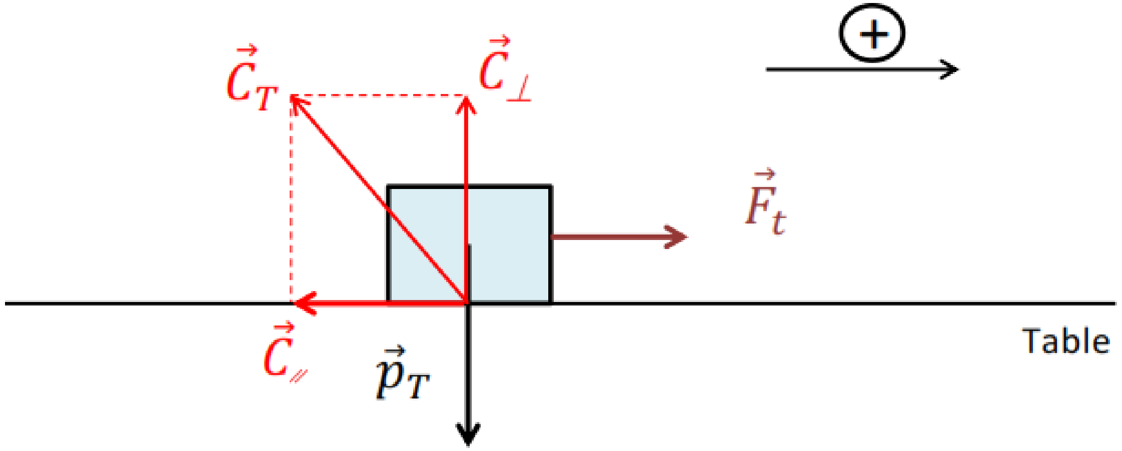
Comme : $\mu_s = \dfrac{C_{/\!/0}}{C_{\perp 0}} \Longrightarrow C_{/\!/0} = \mu_s \, C_{\perp 0}$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

1) Déterminer l'instant t_0, de la rupture de l'équilibre du système.

Alors :

$$\alpha t_0 = \mu_s (m + M) g$$



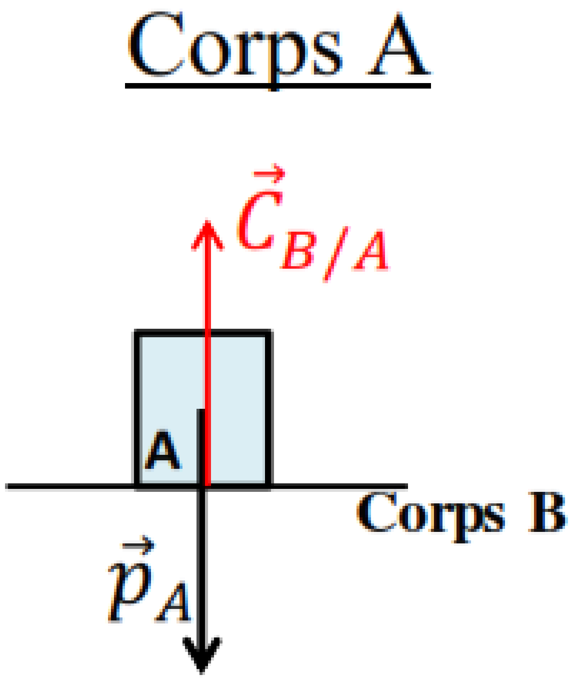
$$\Rightarrow \quad t_0 = \frac{\mu_s}{\alpha} (m + M) g$$

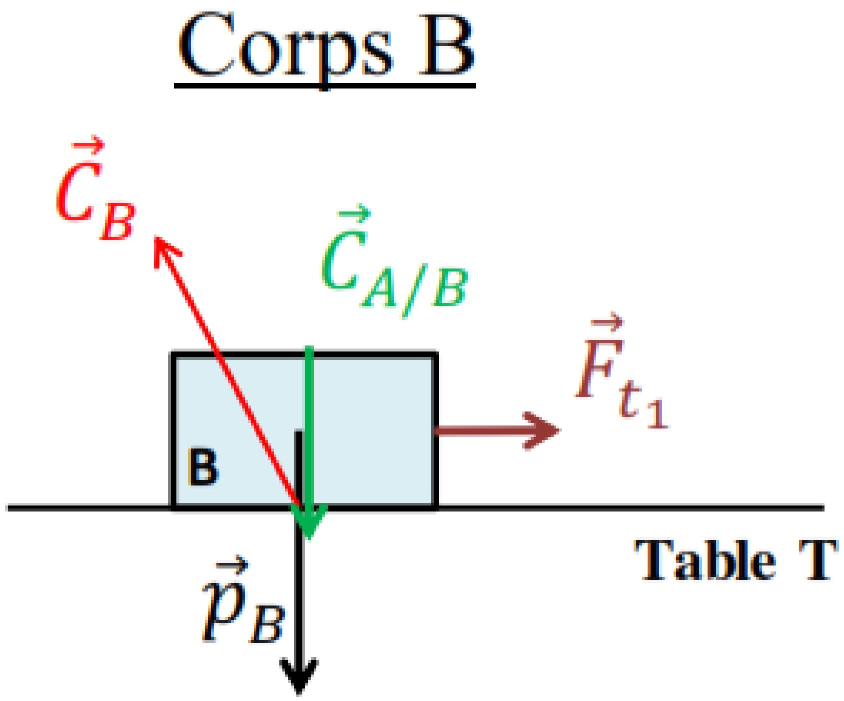
Soit : $t_0 = 50\ s$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

2) Dessiner qualitativement les forces appliquées à l'instant t_1 = 30s ;
a) au corps (A) tout seul; b) au corps (B) tout seul; c) au système (A+B).

Pour t_1 = 30s < t_0 = 50s ➔ Les deux corps sont toujours à l'équilibre:





❑ Applications : Série.02 : Dynamique

3) Déterminer, puis dessiner à l'échelle 1 cm ➔ 10 N, les forces appliquées, à l'instant t_2 = 60s, au corps (B) tout seul

Pour t_2 = 60s < t_0 = 50s ➔ Les deux corps ne sont plus à l'équilibre (dans ce cas, en mouvement)

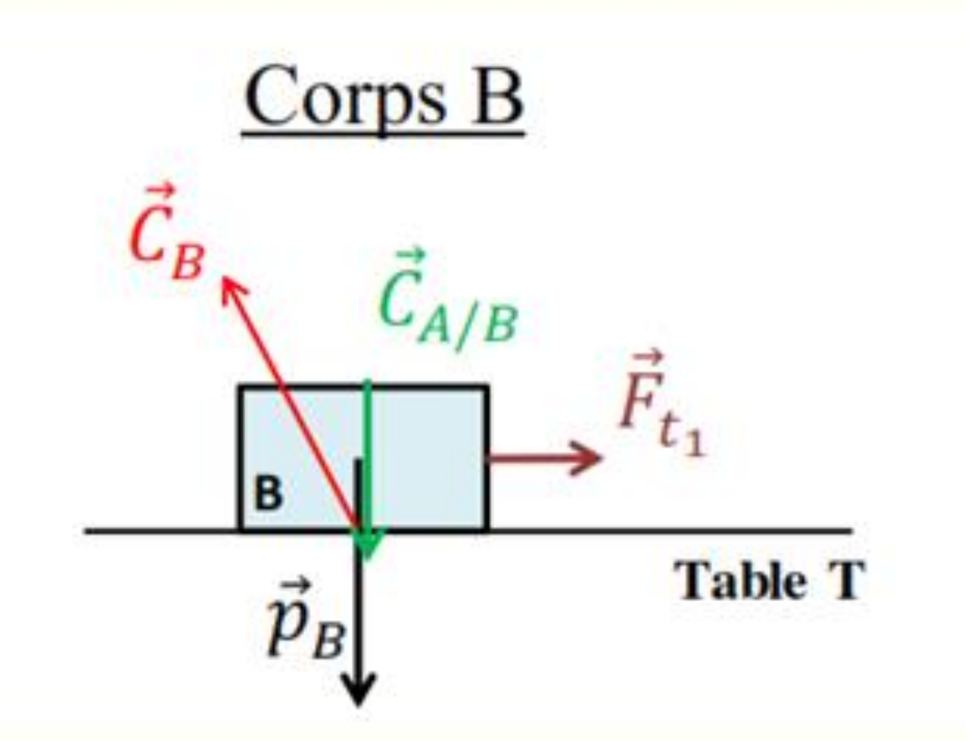
Appliquons la RFD sur le corps (B):

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$$

$$\overrightarrow{C_T} + \overrightarrow{C_{A/B}} + \overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{F(t)} = m\vec{a} \qquad (1)$$

$$\left\|\overrightarrow{P_B}\right\| = Mg = 30\ N \quad (3cm)$$

$$\left\|\overrightarrow{F(t_2)}\right\| = \alpha t_2 = 30\ N \quad (3cm)$$

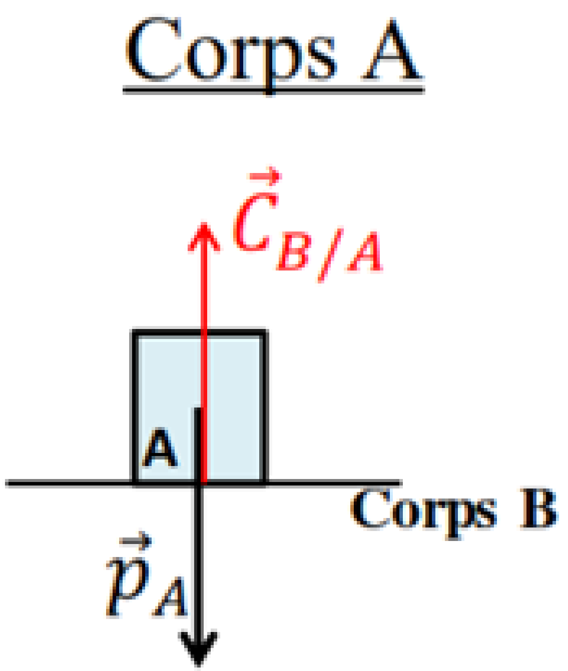


❑ Applications : Série.02 : Dynamique

3) Déterminer, puis dessiner à l'échelle 1 cm ➔ 10 N, les forces appliquées, à l'instant $t_2 = 60s$, au corps (B) tout seul

Pour déterminer, les autres forces appliquées au corps (B), Appliquons la RFD sur le corps (A):

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{C_{B/A}} + \overrightarrow{P_A} = m\vec{a}$$



Projetons sur l'axe (Oy): $\left\|\overrightarrow{C_{B/A}}\right\| - mg = 0$

$$\Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{C_{B/A}}\right\| = mg = 20\ N$$

Et en vertu de la 3ème loi de Newton :

$$\left\|\overrightarrow{C_{A/B}}\right\| = \left\|\overrightarrow{C_{B/A}}\right\| = 20\ N \quad (2cm)$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

3) Déterminer, puis dessiner à l'échelle 1 cm ➔ 10 N, les forces appliquées, à l'instant t_2 = 60s, au corps (B) tout seul

$$\overrightarrow{C_T} + \overrightarrow{C_{A/B}} + \overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{F(t)} = m\vec{a} \qquad (1)$$

Projetons sur les deux axes (Ox) et (Oy), l'équation (1):

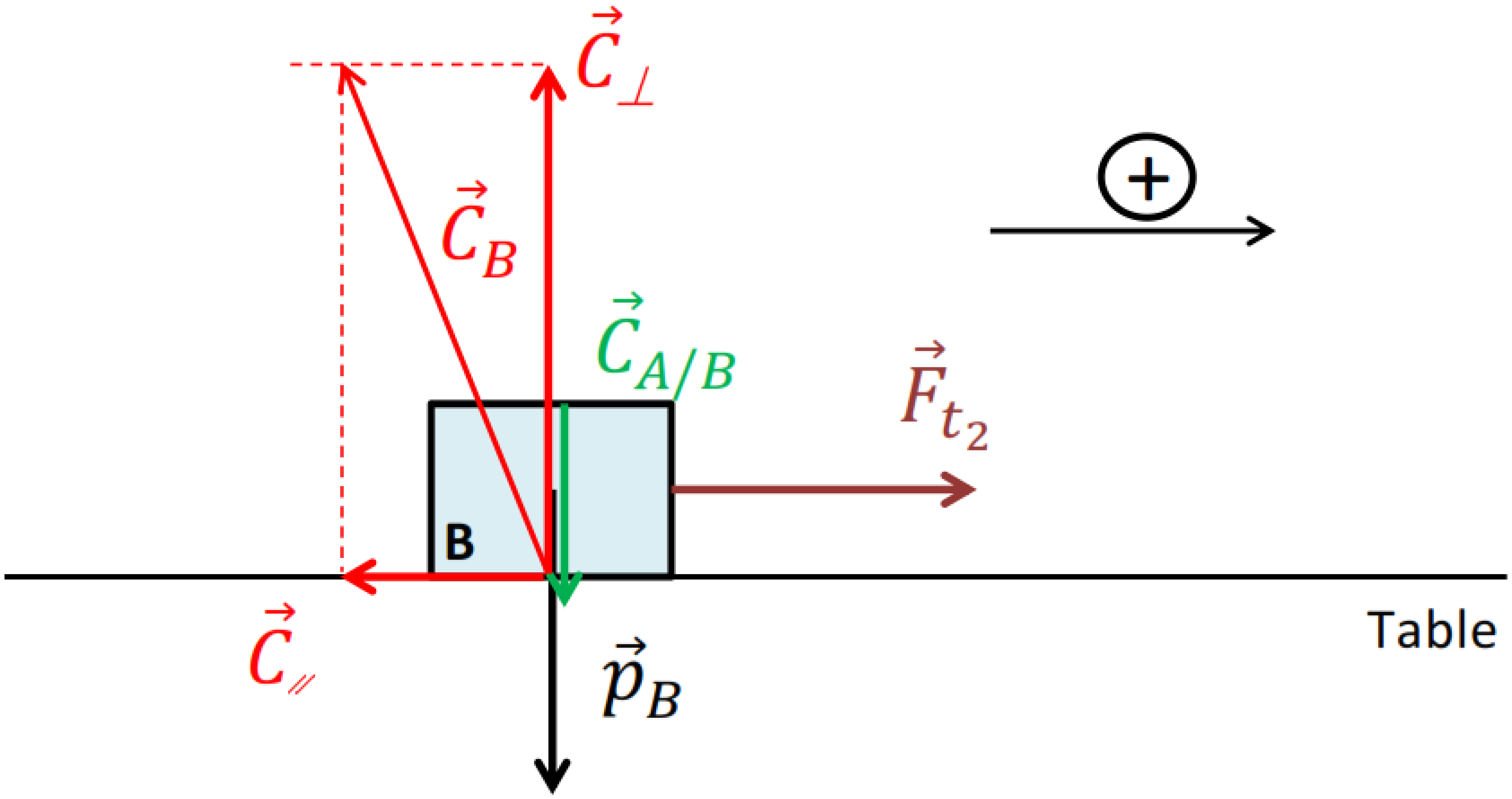
$$\begin{cases} (Ox): \quad F(t_2) - C_{/\!/} = ma & (2) \\ (Oy): C_\perp - C_{A/B} - mg = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) ==> C_\perp = C_{A/B} + mg = 50\ N \ (5cm)$$

$$\Rightarrow \quad \mu_d = \frac{C_{/\!/}}{C_\perp} ===> C_{/\!/} = \mu_d\, C_\perp = 20\ N \ (2cm)$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

3) Déterminer, puis dessiner à l'échelle 1 cm ➔ 10 N, les forces appliquées, à l'instant t_2 = 60s, au corps (B) tout seul



Les forces appliquées au corps B, en respectant l'échelle donné

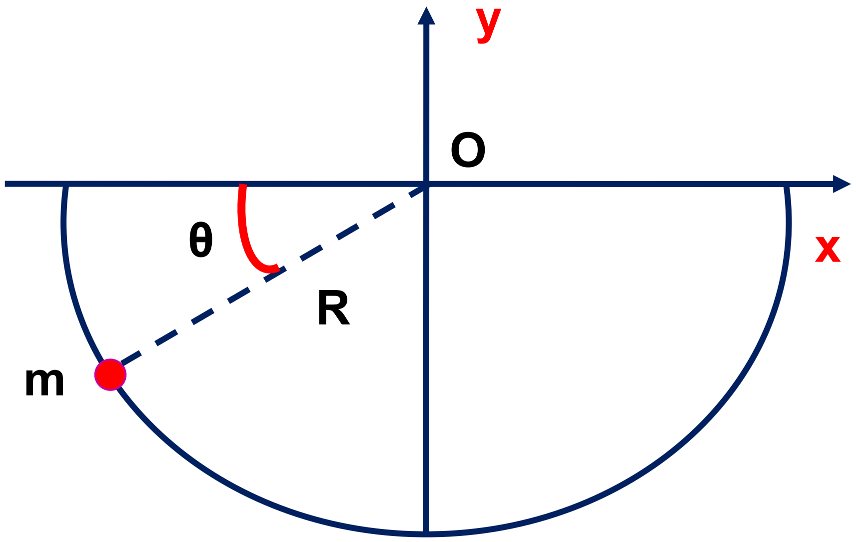
❑ Applications : Série.02 : Dynamique

EXERCICE 9 :

On considère le mouvement d'une particule de masse $m = 100g$ sur la piste de rayon $R = 1m$. Le contact particule/piste présente les caractéristiques suivantes : $\mu_s = 0.5777$ et $\mu_d = 0.25$.

1) Quelle est la valeur minimale θ_m de l'angle θ pour laquelle la particule, posée sur la piste, reste en équilibre ?

2) En un point N de la piste, repéré par l'angle $\theta_m = 60°$, la particule a une accélération $a = 2,8\ m/s^2$, et une vitesse $V = 1\ m/s$, déterminer la force de contact C, et représenter les forces agissant sur la particule à l'échelle : 1 cm ➔ 0.5 N



❑ Applications : Série.02 : Dynamique

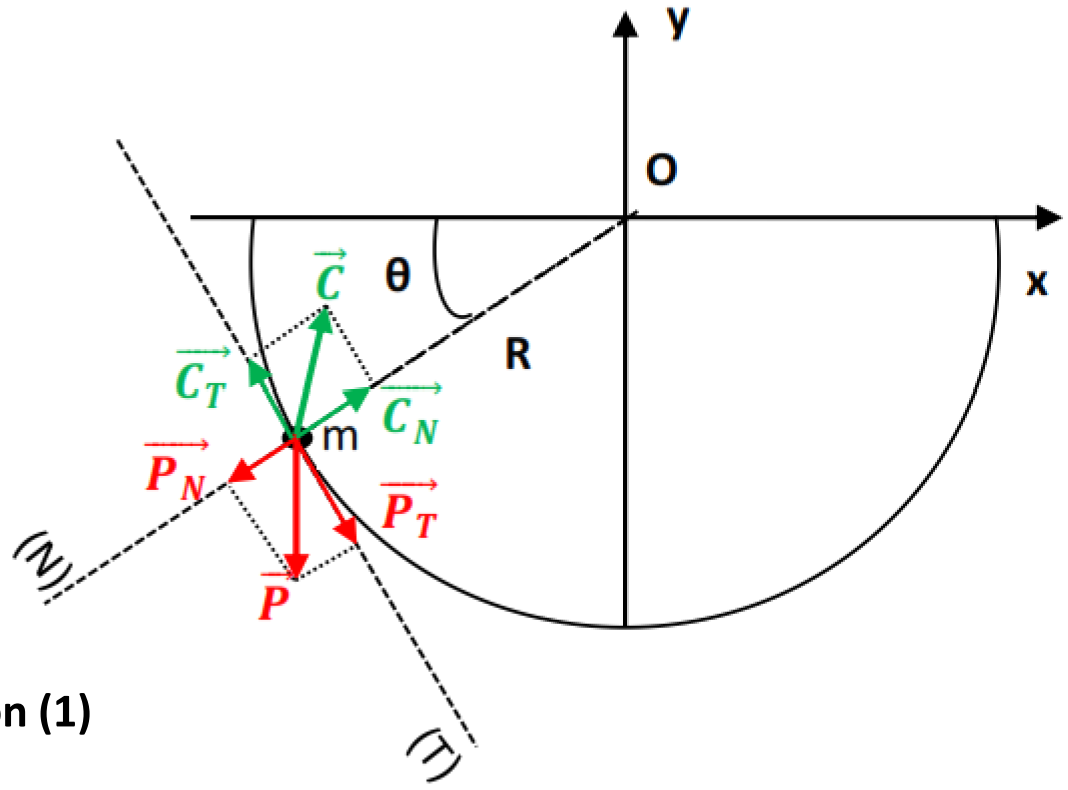
1) Quelle est la valeur minimale θ_m de l'angle θ pour laquelle la particule, posée sur la piste, reste en équilibre ?

Appliquons la RFD sur la particule :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$$

Comme la particule est à l'équilibre donc $\vec{a} = \vec{0}$:

$$\vec{C} + \vec{P} = \vec{0} \qquad (1)$$



Projetons sur les deux axes normal (N) et tangentiel (T), l'équation (1) :

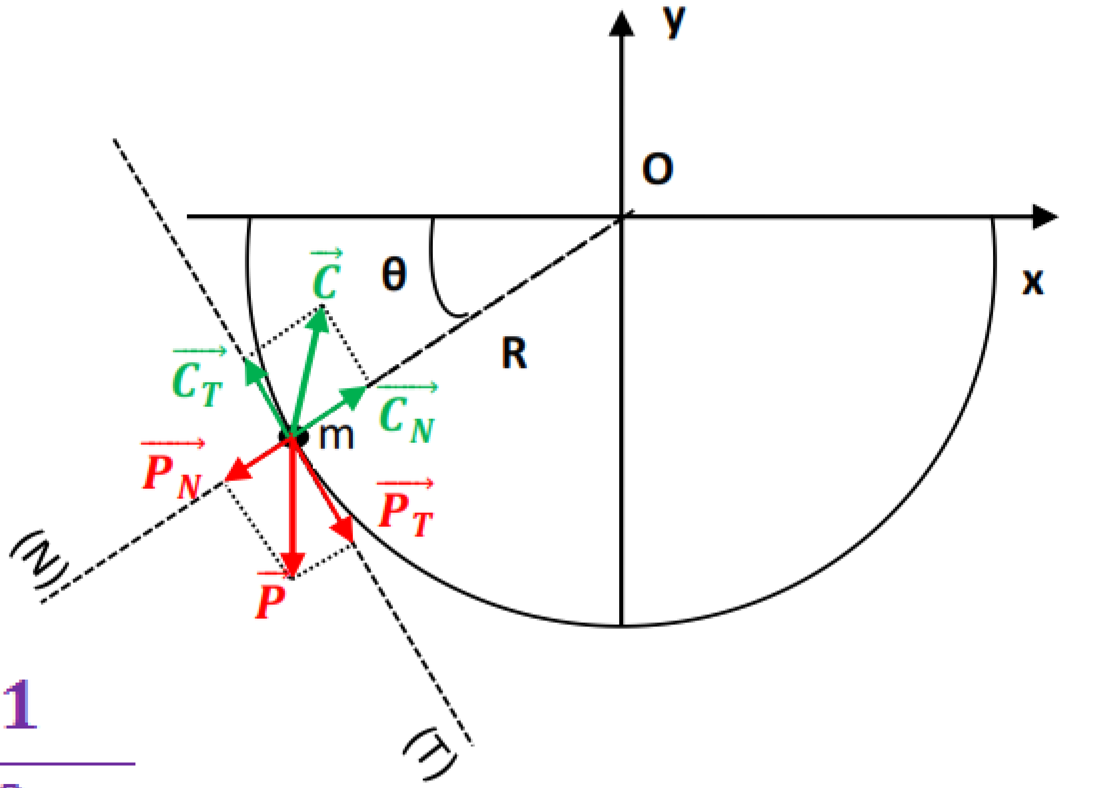
❑ Applications : Série.02 : Dynamique

1) Quelle est la valeur minimale θ_m de l'angle θ pour laquelle la particule, posée sur la piste, reste en équilibre ?

$$\begin{cases} (N)\ \ C_N - mg\sin\theta_{min} = 0 & (2) \\ (T):mg\cos\theta_{min} - C_T = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (N)\ \ C_N = mg\sin\theta_{min} \\ (T): C_T = mg\cos\theta_{min} \end{cases}$$

$$\mu_s = \frac{C_T}{C_N} \ ===> \ \mu_s = \frac{mg\cos\theta_{min}}{mg\sin\theta_{min}} = \frac{1}{tg\theta_{min}}$$



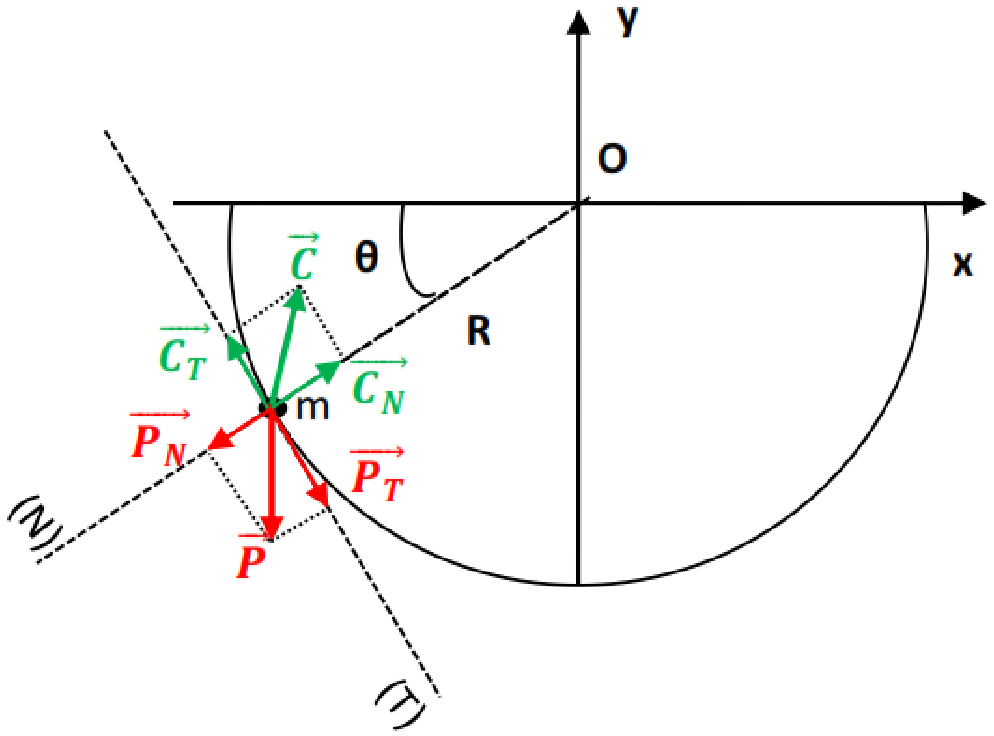
$$\Rightarrow \theta_{min} \cong 59.9°$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

2) En un point N de la piste, repéré par l'angle $\theta_m = 60°$, la particule a une accélération $a = 2,8\ m/s^2$, et une vitesse $V = 1\ m/s$, déterminer la force de contact C, et représenter les forces agissant sur la particule à l'échelle : 1 cm ➔ 0.5 N

Appliquons la RFD sur la particule :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$$



$$\vec{C} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} (N)\quad C_N - mg\sin\vartheta = ma_n \\ (T): mg\cos\vartheta - C_T = ma_T \end{cases}$$

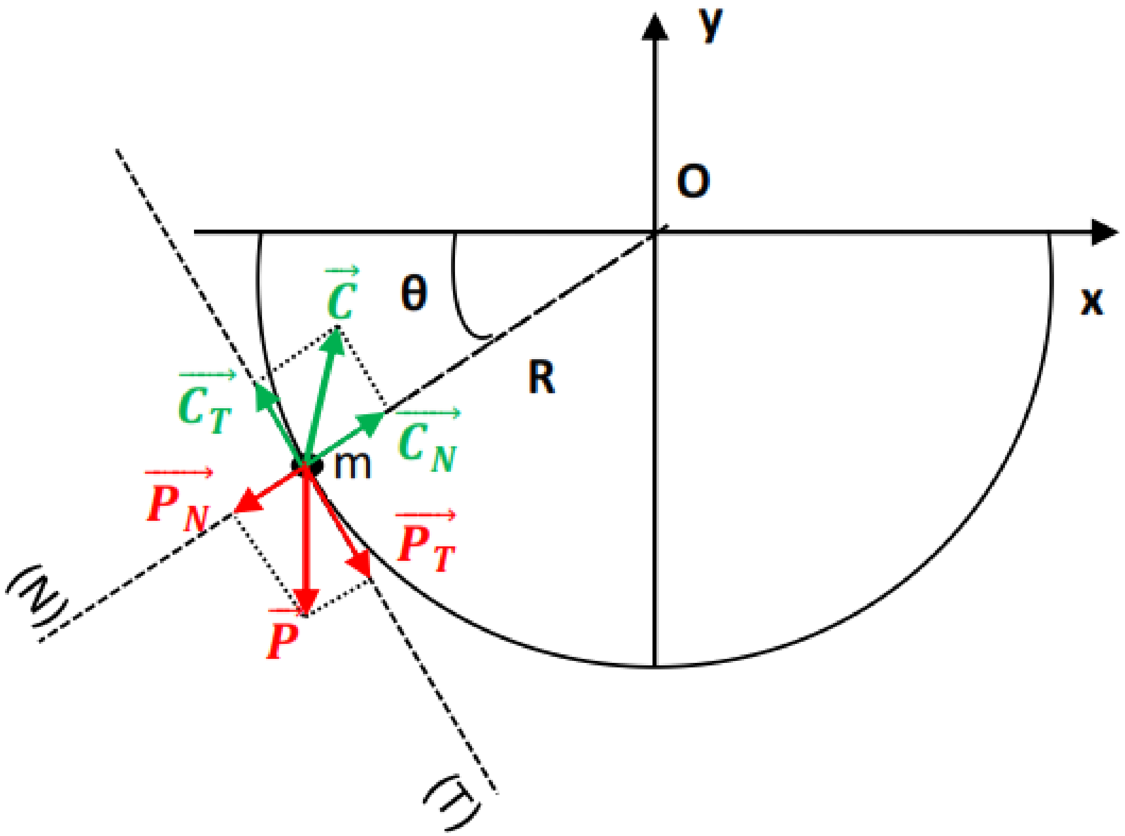
$$a_n = \frac{V^2}{R}$$

$$a_T = \sqrt{a^2 - a_N{}^2}$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

2) En un point N de la piste, repéré par l'angle θ_m = 60 °, la particule a une accélération a = 2,8 m/s², et une vitesse V = 1 m/s, déterminer la force de contact C, et représenter les forces agissant sur la particule à l'échelle : 1 cm ➔ 0.5 N

$$\begin{cases} (N)\ \ C_N = m\dfrac{V^2}{R} + mg\sin\vartheta \\ (T):C_T = mg\cos\vartheta - m\sqrt{a^2 - a_N^2} \end{cases}$$

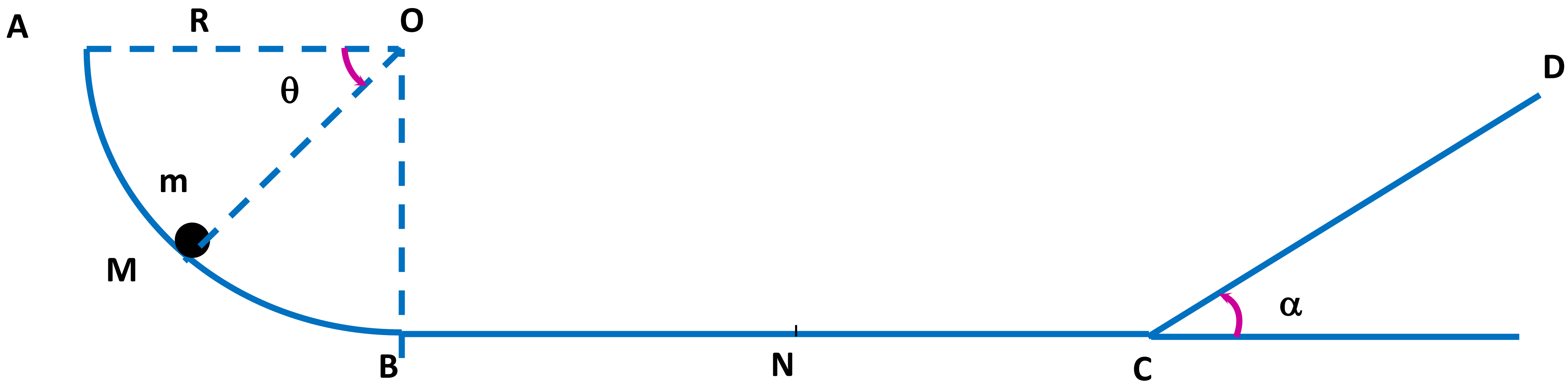


$$\Rightarrow \begin{cases} (N)\ \ C_N = 0.23\ N \\ (T):C_T = 0.76\ N \end{cases}$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

EXERCICE 10 :

Un point matériel de masse m glisse le long du trajet ABCD représenté sur la figure ci-dessous. La partie circulaire AB de centre O et de rayon R est complètement lisse. La piste BCD est constituée d'une partie horizontale BC caractérisée par un coefficient dynamique μ_{d1}, et d'une autre partie CD, inclinée d'un angle α, caractérisée par un coefficient dynamique μ_{d2}.



❑ Applications : Série.02 : Dynamique

EXERCICE 10:

1.

a) Représenter qualitativement les forces appliquées sur la masse m au point M défini par l'angle θ (voir figure).

b) Montrer que la vitesse de m au point M est donnée par:

$$V = \sqrt{2Rg(\sin\theta) + V_A^2}$$

où V_A est la vitesse de m au point A et g est l'accélération de la pesanteur.

c) Déduire l'expression de la vitesse au point B.

2.

a) Représenter qualitativement les forces appliquées sur m au point N sur la partie BC.

b) Trouver l'expression de l'accélération de la masse m au point N.

c) On pose BC= R, déduire l'expression de la vitesse au point C du trajet.

3. On donne: $g = 10 m/s^2$, $\alpha = 20°$, $\mu_{d2} = 0,5$ et CD = R.

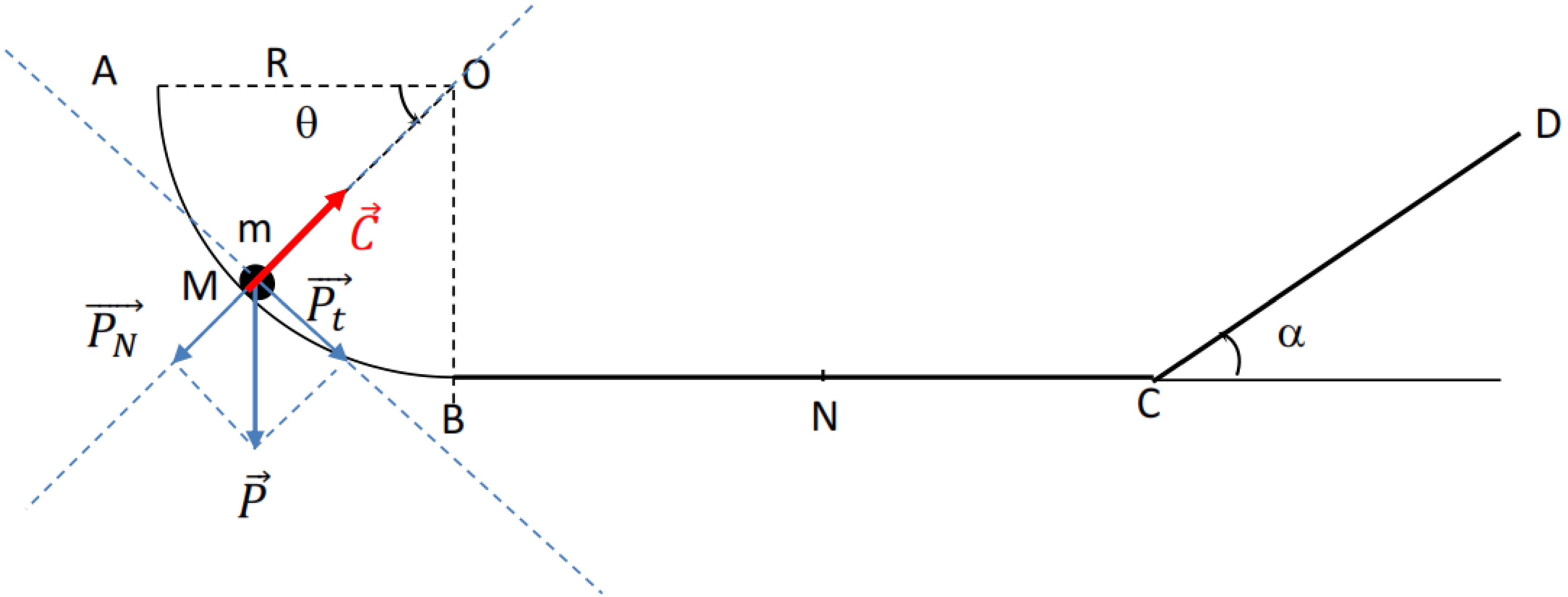
a) Calculer l'accélération de m sur la partie inclinée CD.

b) Si la vitesse initiale de m et nulle ($V_A = 0$), quelle doit être la valeur de μ_{d1} pour que la masse s'arrête au point D ?

c) Dans ce cas ($V_A = 0$ m/s), est-ce que la masse m peut redescendre après son arrêt, sur CD ? Justifier votre réponse.

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

a) Représenter qualitativement les forces appliquées sur la masse m au point M défini par l'angle θ (voir figure).



❑ Applications : Série.02 : Dynamique

b) Montrer que la vitesse de m au point M est donnée par: $V = \sqrt{2Rg(\sin\theta) + V_A^2}$

où V_A est la vitesse de m au point A et g est l'accélération de la pesanteur.

Appliquons la RFD sur la corps de masse m :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{C} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} (N)\quad C - mg\sin\vartheta = ma_n \\ (T): mg\cos\vartheta = ma_T \end{cases} \Longrightarrow a_T = g\cos\vartheta$$

Avec :

$$a_T = \frac{dV}{dt} \Longrightarrow dV = a_T\,dt = g\cos\vartheta\,dt \qquad (1)$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

b) Montrer que la vitesse de m au point M est donnée par: $V = \sqrt{2Rg(\sin\theta) + V_A^2}$

où V_A est la vitesse de m au point A et g est l'accélération de la pesanteur.

Nous avons aussi :

$$\begin{cases} V = R\omega \\ \omega = \dfrac{d\vartheta}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{d\vartheta}{dt} \Longrightarrow dt = \frac{R}{V}d\vartheta \qquad (2)$$

Remplaçant l'équation (2) dans (1): $$VdV = g\cos\vartheta\, Rd\vartheta$$

$$\Longrightarrow \int_{V_A}^{V_M} VdV = \int_0^{\vartheta} g\cos\vartheta\, Rd\vartheta$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

b) Montrer que la vitesse de m au point M est donnée par: $V = \sqrt{2Rg(\sin\theta) + V_A^2}$

où V_A est la vitesse de m au point A et g est l'accélération de la pesanteur.

Nous retrouvons donc :

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(V_M^2 - V_A^2) = gR\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad V_M = \sqrt{2gR\sin\vartheta + V_A^2}$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

c) Déduire l'expression de la vitesse au point B.

Au point B: $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow$ $sin\,\frac{\pi}{2} = 1$

Donc :

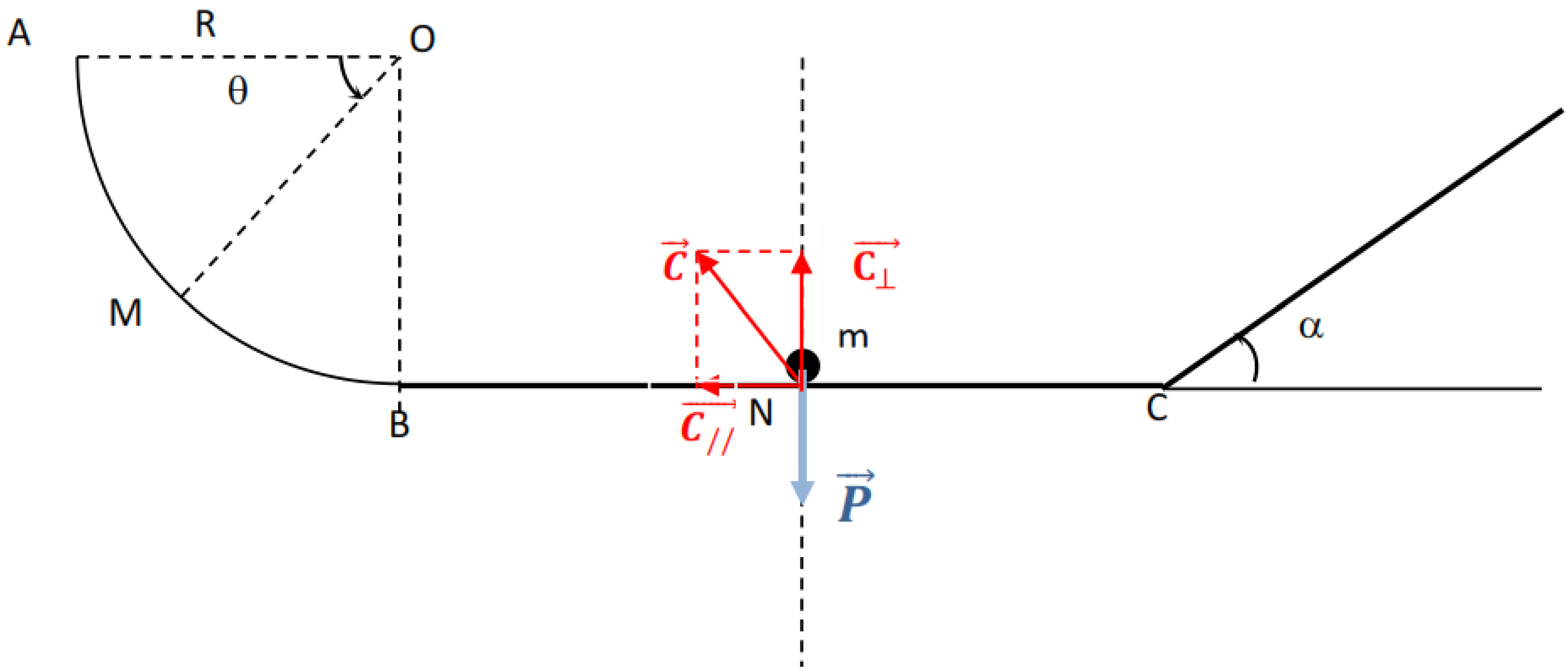
$$\Longrightarrow \quad V_B = \sqrt{2gR + V_A^2}$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

2.

a) Représenter qualitativement les forces appliquées sur m au point N sur la partie BC.

La partie BC ➔ Présence de frottements



❑ Applications : Série.02 : Dynamique

b) Trouver l'expression de l'accélération de la masse m au point N.

Appliquons la RFD sur la particule :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{C} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} (Ox) \; -C_x = ma \\ (Oy) : C_y - mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mu_{d1} = \frac{C_x}{C_y} = \frac{-ma}{mg} = \frac{-a}{g}$$

$$\Rightarrow \quad a = -\mu_{d1} g$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

c) On pose BC = R, déduire l'expression de la vitesse au point C du trajet.

Nous avons :

$$a = \frac{dV}{dt} \quad ===> \quad dV = a\,dt$$

Et comme :

$$a = -\mu_{d1} g$$

Alors :

$$dV = -\mu_{d1} g\,dt$$

Et comme :

$$V = \frac{dx}{dt} \quad ===> \quad dt = \frac{dx}{V}$$

Alors:

$$dV = -\mu_{d1} g \frac{dx}{V} \Longrightarrow V\,dV = -\mu_{d1} g\,dx$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

c) On pose BC = R, déduire l'expression de la vitesse au point C du trajet.

Donc :

$$\int_{V_B}^{V_C} V\,dV = -\mu_{d1} g \int_B^C dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(V_C^2 - V_B^2\right) = -\mu_{d1} g BC \Rightarrow V_C^2 = -\mu_{d1} g 2R + V_B^2$$

Et comme :

$$V_B = \sqrt{2gR + V_A^2}$$

Alors :

$$V_C = \sqrt{2gR(1-\mu_{d1}) + V_A^2}$$

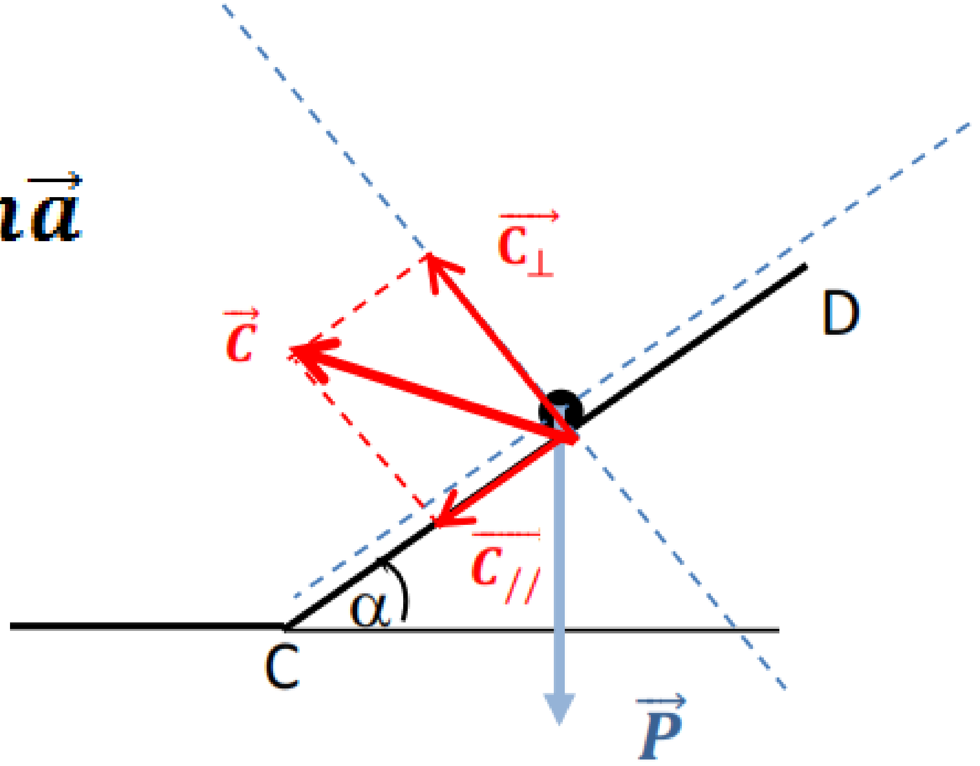
❑ Applications : Série.02 : Dynamique

3. On donne: $g = 10 m/s^2$, $\alpha = 20°$, $\mu_{d2} = 0,5$ et $CD = R$.
a) Calculer l'accélération de m sur la partie inclinée CD.

Appliquons la RFD sur la particule :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{C} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} (Ox) & -C_{//} - mg\sin\alpha = ma \\ (Oy): & -mg\cos\alpha + C_{\perp} = 0 \end{cases}$$



❑ Applications : Série.02 : Dynamique

3. On donne: g = 10m/s², α = 20°, μ_{d2}= 0, 5 et CD = R.

a) Calculer l'accélération de m sur la partie inclinée CD.

Et comme :

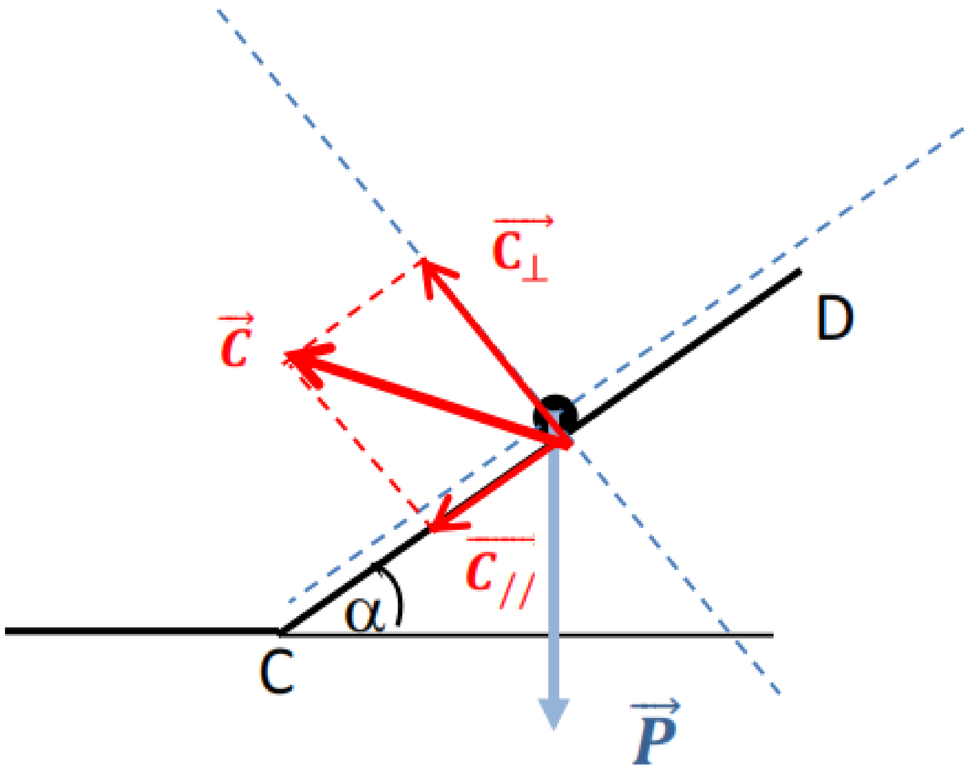
$$\mu_{d2} = \frac{C_{/\!/}}{C_{\perp}}$$

Alors :

$$a = -g(\mu_{d2} \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Soit :

$$a = -8.1\,(m/s^2)$$



❑ Applications : Série.02 : Dynamique

b) Si la vitesse initiale de m et nulle ($V_A = 0$), quelle doit être la valeur de μ_{d1} pour que la masse s'arrête au point D ?

Nous avons :

$$V_D^2 - V_C^2 = 2Ra$$

Et comme :

$$V_D = 0\ (m/s) \Rightarrow V_C = \sqrt{-2Ra}$$

Donc:

$$V_C = \sqrt{2gR(1-\mu_{d1}) + V_A^2} = \sqrt{-2Ra}$$

Et comme :

$$V_A = 0\ (m/s) \Rightarrow \mu_{d1} = \left(1 + \frac{a}{g}\right) \approx 0.19$$

❑ Applications : Série.02 : Dynamique

c) Dans ce cas (V_A= 0 m/s), est-ce que la masse m peut redescendre après son arrêt, sur CD ? Justifier votre réponse.

Nous savons que, $\mu_{d2} < \mu_{s2}$

Prenons la valeur minimale du coefficient de frottement statique, $\mu_{s2} = \mu_{d2} = 0.5$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{min} = 0.5 \quad ===> \quad \alpha_{min} = 26.56\,°$$

L'inclinaison de la partie CD étant égale à 20°, la masse m ne peut pas redescendre