University of Science and the Technology
Houari Boumediene (USTHB)

Faculty of Physics

Chapter 2
Dynamics

(Exercises of polar cordinat)

1st year LIC.INFORMATIQUE

❑ Série.01 : Cinématique du point

EXERCICE 10

Un mobile M se déplaçant dans un plan est repéré par ses coordonnées polaires r et θ telles que:

$r(t) = 2 - e^{-t}$ et $\theta(t) = -t + \frac{\pi}{2}$ où est en r est en mètres et en θ radians.

- Déterminer les composantes radiale V_r (t) et transversale V_θ (t) de la vitesse de M à tout in

- Représenter à l'instant t = 0 s :

  - Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ suivant l'échelle : 2 cm ➔ 1 m
  - Le vecteur vitesse $\vec{V}$ suivant l'échelle : 2 cm ➔ 1 m/s
  - Le vecteur accélération $\vec{a}$ suivant l'échelle : 1 cm ➔ 1 m/s², sachant que :

    $a_r (0) = a_\theta (0) = -2\ m/s^2$

- En déduire le rayon de courbure ρ de la trajectoire à l'instant t = 0 s

❑ Série.01 : Cinématique du point

Corrigé de l'exercice 10 :

- **Déterminer les composantes radiale V_r (t) et transversale V_θ (t) de la vitesse de M à tout in**

$$\overrightarrow{V(t)} = V_r(t)\overrightarrow{u_r} + V_\theta(t)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{dr(t)}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\theta(t)}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

Soit :

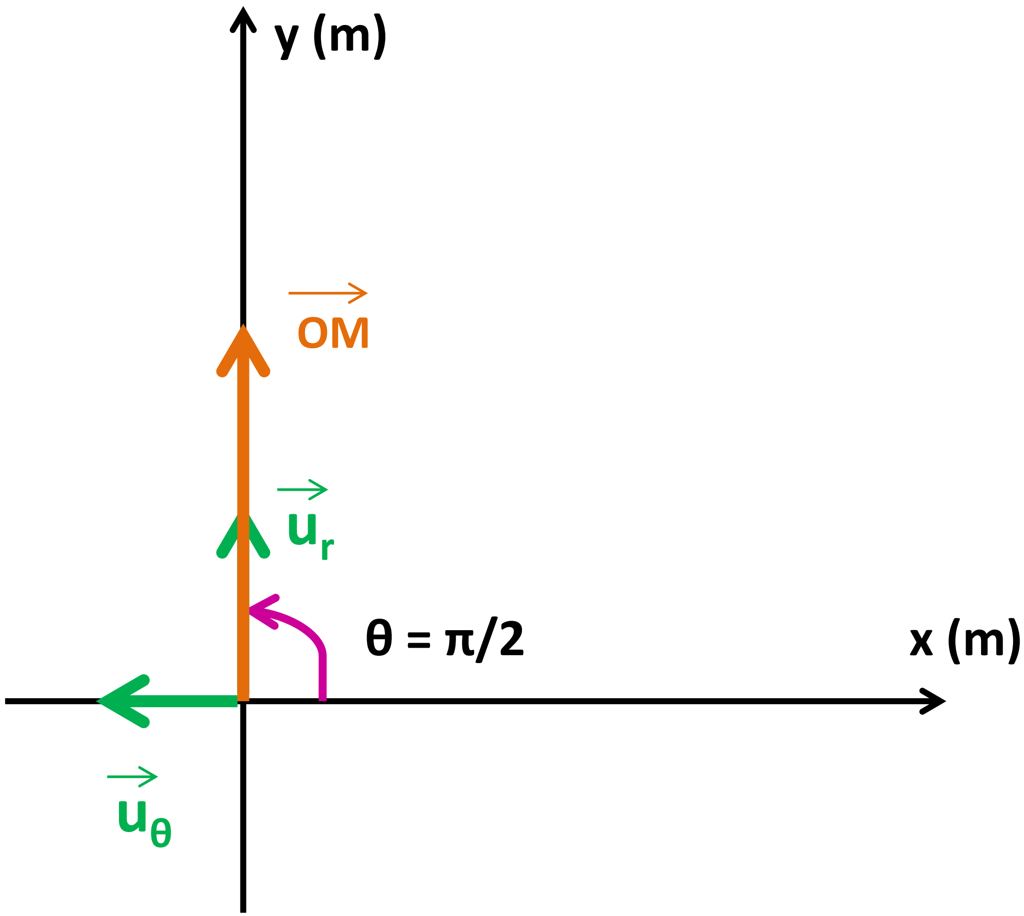
$$\begin{cases} V_r(t) = \dfrac{dr(t)}{dt} = e^{-t} \ (m/s) \\ V_\theta(t) = r\dfrac{d\theta(t)}{dt} = e^{-t} - 2 \ (m/s) \end{cases}$$

❑ Série.01 : Cinématique du point

- Représenter à l'instant t = 0 s :
  - ➢ Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ suivant l'échelle : 2 cm ➔ 1 m

$$\begin{cases} r(0) = 1\ (m), \\ \theta\ (0) = \dfrac{\pi}{2}\ (rad) \end{cases}$$

En respectant l'échelle,
r(0) = 2cm



❑ Série.01 : Cinématique du point

- Représenter à l'instant t = 0 s :

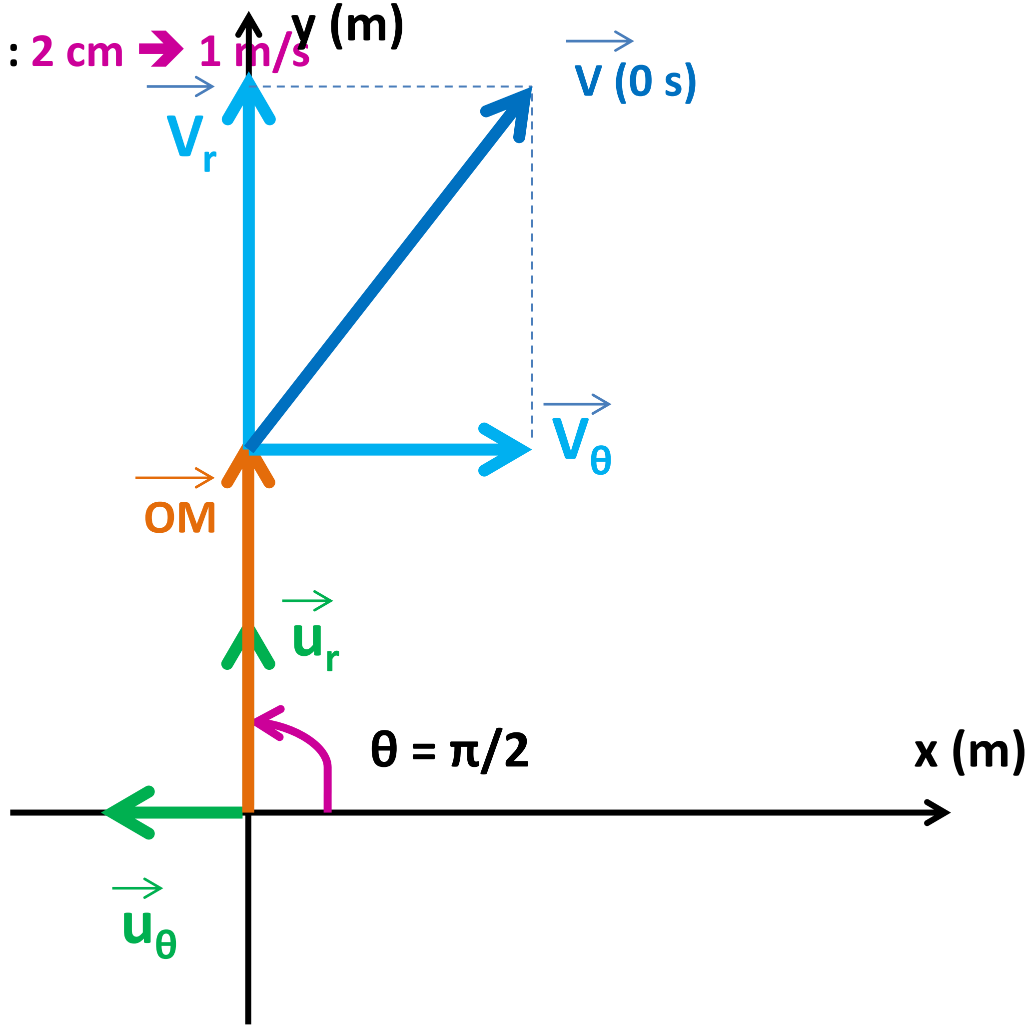
➢ Le vecteur vitesse $\vec{V}$ suivant l'échelle : 2 cm ➔ 1 m/s

$$\begin{cases} V_r(0) = 1\,(m/s), \\ V_\theta(0) = -1\,(m/s) \end{cases}$$

En respectant l'échelle,

$$\begin{cases} V_r(0) = \boxed{2cm,} \\ V_\theta(0) = \boxed{2\,cm} \end{cases}$$

Longueur des vecteurs a représenter



❑ Série.01 : Cinématique du point

- Représenter à l'instant t = 0 s :

➢ Le vecteur accélération $\vec{a}$ suivant l'échelle :

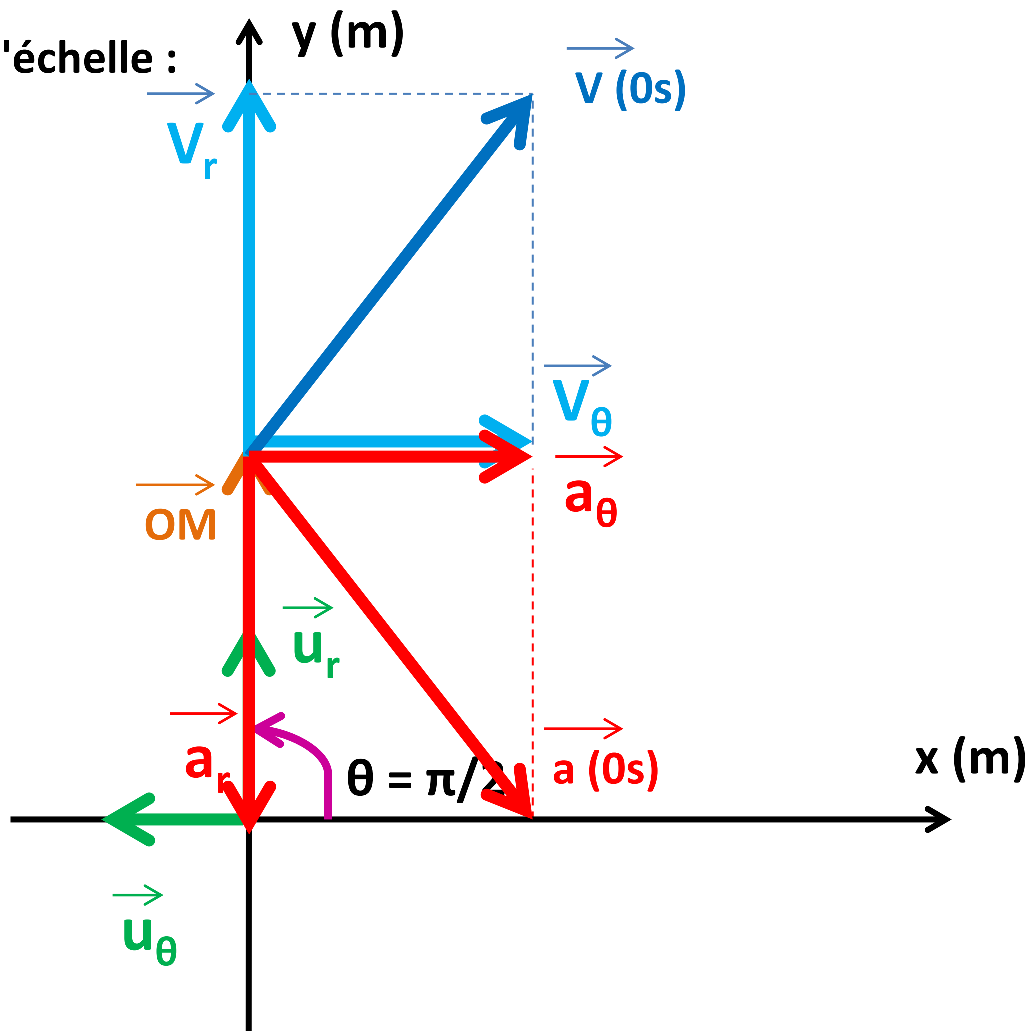
1 cm ➔ 1 m/s²

$$\begin{cases} a_r(0) = -2\ (m/s^2), \\ a_\theta(0) = -2\ (m/s^2) \end{cases}$$

En respectant l'échelle,

$$\begin{cases} a_r(0) = \boxed{2\ cm,} \\ a_\theta(0) = \boxed{2\ cm} \end{cases}$$

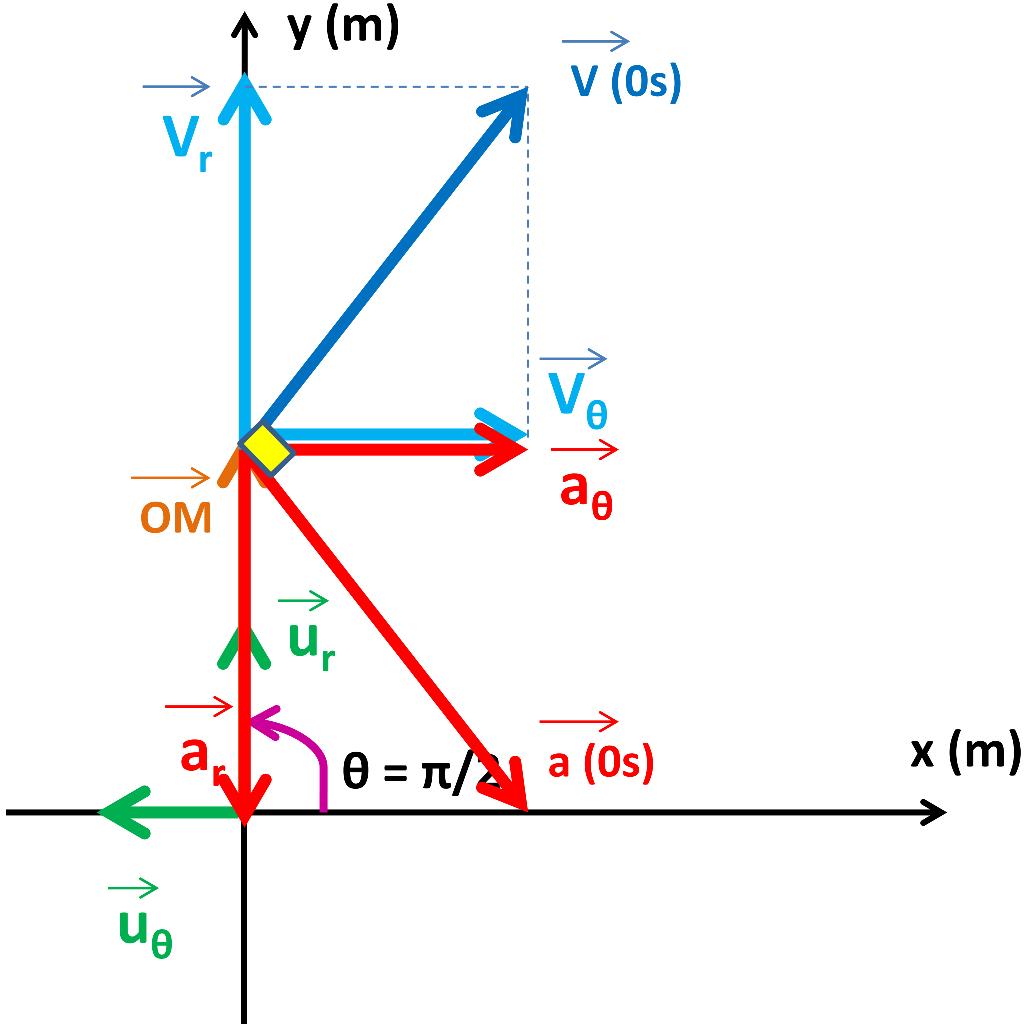
Longueur des vecteurs a représenter



❑ Série.01 : Cinématique du point

Nous remarquons que les vecteurs vitesse et accélération, à t = 0s, sont perpendiculaire, et ceci est vérifié analytiquement par :

$$\overrightarrow{a_r}.\overrightarrow{a_\theta} = 0$$



❑ Série.01 : Cinématique du point

- En déduire le rayon de courbure ρ de la trajectoire à l'instant t = 0 s

On sait que :

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n}$$

À t = 0 s, le vecteur accélération tangentielle $a_t = 0\ m/s^2$

Donc: $a_n = a_0$ Avec : $a_0 = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$

$$\rho = \frac{V_0^2}{\sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}} = \frac{\sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}}{\sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}} \Rightarrow \rho = 0{,}71\ m$$

❑ Série.01 : Cinématique du point

EXERCICE 12:

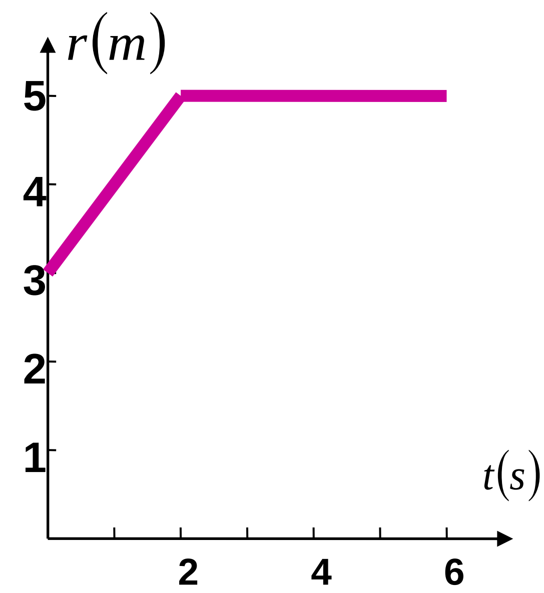
Un mobile M est repéré par ses coordonnées polaires r(t) et θ (t) dont les variations en fonction du temps sont données par les graphes ci-dessous.

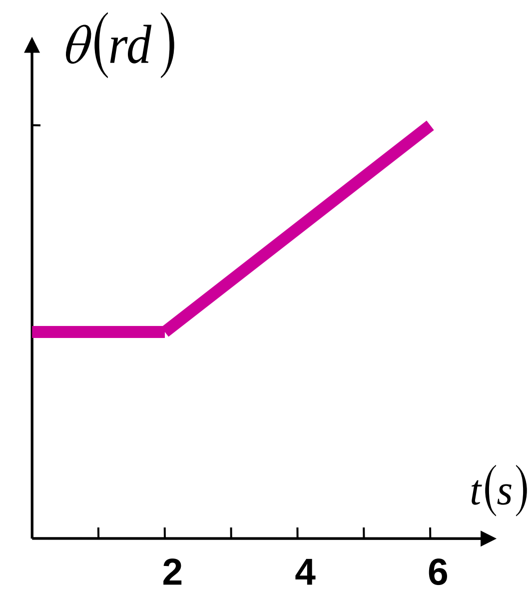
- Tracer la trajectoire du mobile.
- Quelles sont les différentes phases du mouvement entre les instants t = 0s et t = 6s. Quelle est la nature de chacune d'elles. Justifier vos réponses.
- Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants t = 1s et t = 4s.

On prendre pour échelles:

2 cm ➔ 1m/s et

1 cm ➔ 0.1 m/s²





❑ Série.01 : Cinématique du point

Corrigé de l'exercice 10:

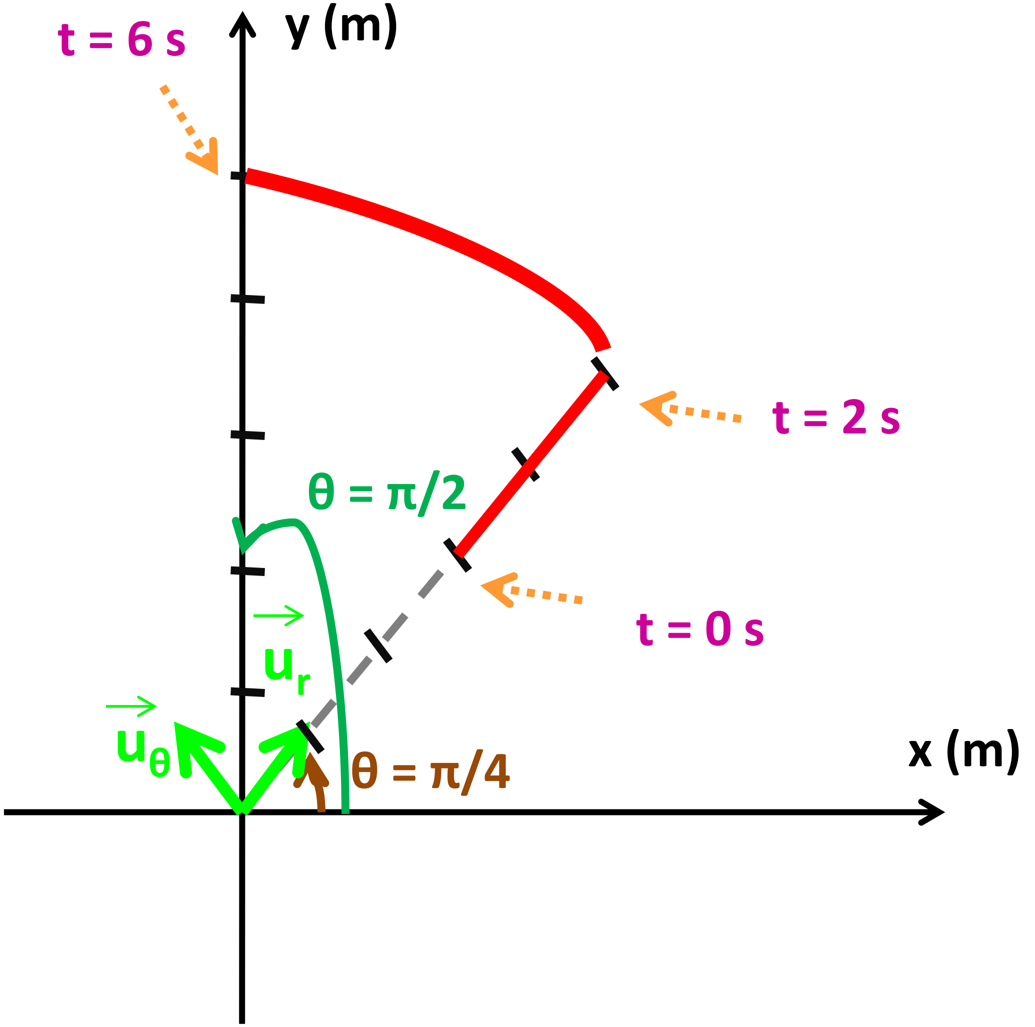
•Tracer **la trajectoire du mobile**.

$$0 \leq t \leq 2\,s$$

$$\begin{cases} r \uparrow (de\ 3\ \text{à}\ 5\ m) \\ \theta = C^{ste} = \dfrac{\pi}{4}\ rad \end{cases}$$

$$2 \leq t \leq 6\,s$$

$$\begin{cases} r = C^{ste} = 5m \\ \theta \uparrow \left(de\ \dfrac{\pi}{4}\ \text{à}\ \dfrac{\pi}{2}\ rad\right) \end{cases}$$



❑ Série.01 : Cinématique du point

• Quelles sont les différentes phases du mouvement entre les instants $t = 0s$ et $t = 6s$. Quelle est la nature de chacune d'elles. Justifier vos réponses.

$$0 \leq t \leq 2\,s\,; \begin{cases} Trajectoire\ rectiligne \\ V = C^{ste} \end{cases}$$

⇒ **Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)**

$$2 \leq t \leq 6\,s\,; \begin{cases} Trajectoire\ circulaire \\ a_t = 0\,m/s^2 \\ a_n = \dfrac{V^2}{R} \end{cases}$$

⇒ **Mouvement Circulaire Uniforme (MCU)**

❑ Série.01 : Cinématique du point

- Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants t = 1s et t = 4s.

On prendra pour échelles: 2 cm ➔ 1m/s et 1 cm ➔ 0.1 m/s^2

✓ L'instant t = 1s appartient à la phase I

Le vecteur vitesse s'écrit : $\overrightarrow{V(t)} = V_r(t)\overrightarrow{u_r} + V_\theta(t)\overrightarrow{u_\theta}$

Avec : $$\begin{cases} V_r = \dfrac{dr}{dt} = pente\ de\ la\ droite = \dfrac{\Delta r}{\Delta t} = 1\ (m/s) \\ V_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = 0\ (m/s);\ car\ \ \theta = C^{ste} = \dfrac{\pi}{4}\ rad \end{cases}$$

❑ Série.01 : Cinématique du point

•Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants t = 1s et t = 4s.

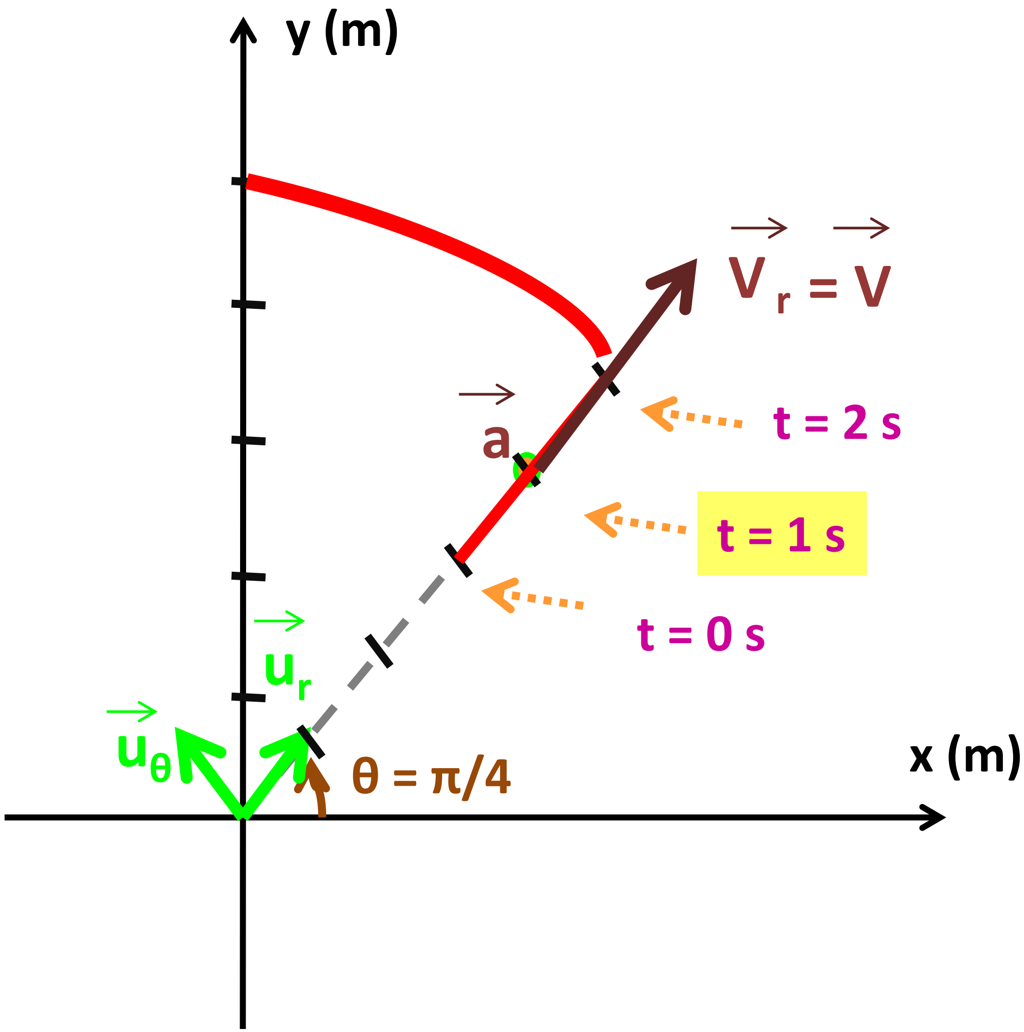
On prendra pour échelles: 2 cm ➔ 1m/s et 1 cm ➔ 0.1 m/s²

Et comme la vitesse est constante, donc, l'accélération à t = 1s est égale à zéro ($a = 0\ m/s^2$)

En respectant l'échelle,

$$V_r = \boxed{2\ cm}$$

Longueur du vecteur a représenter



❑ Série.01 : Cinématique du point

•Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants t = 1s et t = 4s.

On prendra pour échelles: 2 cm ➔ 1m/s et 1 cm ➔ 0.1 m/s^2

✓ L'instant t = 4s appartient à la phase II

$$\overrightarrow{V(t)} = V_r(t)\overrightarrow{u_r} + V_\theta(t)\overrightarrow{u_\theta}$$

Avec :

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{dr}{dt} = 0 \ (m/s);\ car\ \ r = C^{st} = 5\,m \\[2ex] V_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = 5.\left[\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\right] = 5.\left[\dfrac{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}}{6-2}\right] = \dfrac{5\pi}{16} = 0.98\,(m/s) \end{cases}$$

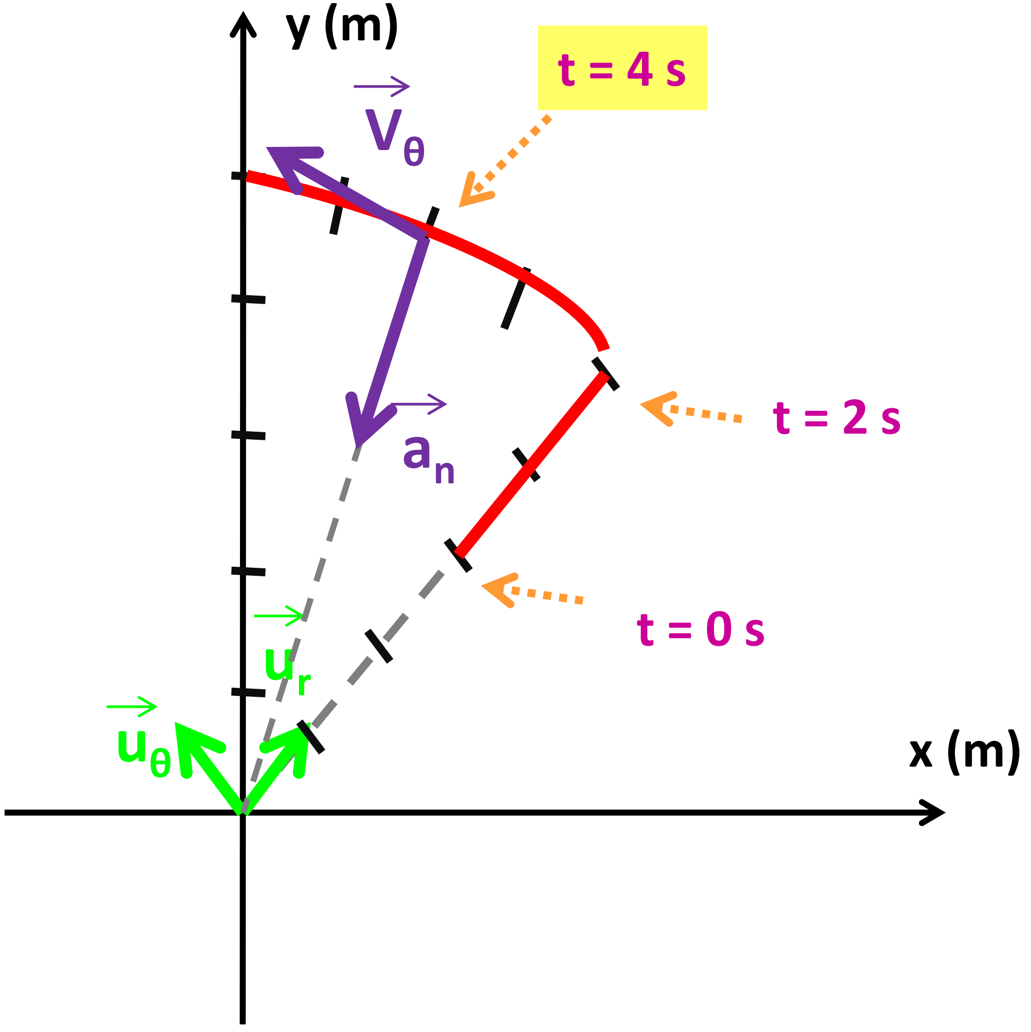
❑ Série.01 : Cinématique du point

- Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants t = 1s et t = 4s.

On prendra pour échelles: 2 cm ➔ 1m/s et 1 cm ➔ 0.1 m/s^2

Pour l'accélération comme t = 4s appartient à la phase II, seule l'accélération normale existe ;

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dV}{dt} = 0\ (m/s^2), \\ a_n = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{0.98^2}{5} = 0.19\ (m/s^2) \end{cases}$$



En respectant l'échelle,

$$V_\theta = 1.96\ cm$$

$$a_n = 1.9\ cm$$